前　　言

几年来我们在南京大学数学系、南京师范大学数学系多次讲授实变函数和泛函分析这两门课程，使用了《实变函数与泛函分析概要》（郑维行、王声望）一书，并参阅了其他教材和专著（见参考文献〔1〕—〔9〕），积累了一些有一定难度的典型习题。为了帮助读者学好这两门课程，我们编写了这本学习参考书，总结了实变函数与泛函分析的基本知识，给出了各种类型的习题及其解答，并在各章中附上一定数量的练习题及解法提示，同时还收编了"南京大学攻读硕士学位研究生入学考试实变函数试题（1981—1985年）"，并作了解答，以供读者参考。

本书实变函数部分及其附录由南京师范大学马永培、姜进明和王庆福三位同志执笔，泛函分析部分由南京大学宋国柱执笔。在本书编写过程中，我们得到了郑维行教授、王声望教授和苏维宜副教授等的帮助与指教，郑维行教授还在百忙中详细审阅了本书初稿，提出了许多重要的修改意见，在此谨对他们致以衷心的感谢，并感谢南京大学出版社的同志，由于他们的关怀和支持，才有可能使本书与读者见面。

由于水平有限，整理时间仓促，错误在所难免，所做的解答也未必是最好的，我们恳切地希望读者批评指正。

编者　1987年9月

目　　录

第一章　集合和点集的测度

一、基本概念和主要定理

集的对等　设A,B为两个集，若存在A到B上的一一映射f，则称A与B对等，记作$A\sim B$。

集的势　将所有的集分类，凡彼此对等的集归于一类，不对等的集归于不同的类，每一类均赋于一个标志，称为该类中每个集的势（或基数），集A的势记为$\overline{\overline{A}}$。

若A对等B的子集，但A与B不对等，则称A的势小于B的势，记作$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$或$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$。

定理1（伯恩斯坦(Bernstein)定理）　若A对等B的子集（即$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$），且$B$对等$A$的子集（即$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$），则$A$与$B$对等（即$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$）。

定理2　设A为集，A的一切子集所组成的集类记为$\mathscr{A}$，则$\overline{\overline{\mathscr{A}}}>\overline{\overline{A}}$。

可列集　凡与自然数集N对等的集，皆称**可列集**，可列集的势记为$\aleph_0$。

任何无限集均含有可列的子集；

可列集的任何无限子集仍是可列集；

有限个乃至可列个可列集的并集是可列集；

两个可列集A_1，A_2的积集

$$A_1\times A_2=\left\{(x,\ y)\ |\ x\in A_1,\ y\in A_2\right\}$$为可列集；

有理数集、平面上的有理点集皆是可列集；

连续集 凡与区间[0,1]对等的集，皆称**连续集**，连续集的势记为$\aleph$，容易证明

$$\aleph_0<\aleph$$

定理3（等势定理） 若A为无限集，B为可列集或有限集，则

$$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}$$

无理数集的势为$\aleph$；R^1中的任何区间，R^n中的任何区域的势均为$\aleph$。

开集、闭集及其构造 设$E\subset R^n$，

（1）若存在点a的某个邻域$\cup(a)$，使得$\cup(a)\subset E$，则称a为E的内点；

（2）若E的每点均为E的内点，则称E为开集；

（3）若点a的任一邻域中均含有E的无限多个点，则称a为E的聚点；

（4）E的一切聚点所成之集称为E的导集，记为E'；

（5）若$E'\subset E$，则称E为闭集；

（6）若$E\subset E'$，则称E为自密集；

（7）若$E'=E$，则称E为完全集。

任意个开集的并集是开集；

有限个开集的交集是开集；

任意个闭集的交集为闭集；

有限个闭集的并集为闭集；

闭集的补集是开集，开集的补集是闭集。

定理4（一维开集的构造） 直线上任一非空开集G可表成至多可列个互不相交的开区间（称G的构成区间）之

并：

$$G=\bigcup_{k}(\alpha_k,\beta_k)$$

定理 5　直线上的非空闭集F，或是全直线，或是从直线上挖掉至多可列个互不相交的开区间（称F的余区间）所得之集。

康托（Cantor）集P_0是势为$\aleph$、且不含内点的完全集。

集的序和极大元　设X为一集，

(1) 若在X中规定了某些元素之间的关系$\leqslant$，它满足序公理：

(i) $a\leqslant a$；

(ii) 若$a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则$a=b$；

(iii) 若$a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则$a\leqslant c$

则称X为带有序$\leqslant$的半序集。

(2) 设X为带有序$\leqslant$的半序集，若对X中任何两个元素a,b，关系式$a\leqslant b$与$b\leqslant a$中必有一个成立，则称X为全序集。

(3) 设X为半序集，X_0为X的子集，若存在$b\in X$，使得对一切$x\in X_0$有$x\leqslant b$，则称b为X_0的上界；又设b是X_0的上界，如果对X_0的任一上界b'，均有$b\leqslant b'$，则称b为X_0的上确界。

(4) 设X为半序集，$x\in X$，若对任一$y\in X$，且$x\leqslant y$，必有$y=x$，则称x为X的极大元。

定理 6（佐恩(Zone)引理）　设X为非空半序集，若X的每一非空全序子集有上确界，则X有极大元。

定理 7（选择公理）　设$J=\{A\}$是一族互不相交的非空集组成的集族，则存在满足下面两个条件的集E：

1° $E\subset\bigcup_{A\in J}A$

2° E与J中每一个集A有唯一公共元素。

直线上有界点集的外测度、内测度、可测集

（1）设有界非空开集G有结构表示

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\ \beta_k)$$

规定G的测度为：$mG=\sum_k(\beta_k-\alpha_k)$。

（2）设有界闭集$F\subset(a,b)$，则$G=(a,b)-F$为有界开集，规定闭集F的测度为：

$$mF=b-a-mG$$

（3）设E为有界点集，G为包含E的任一开集，F为含于E内的任一闭集。E的外测度m^*E与内测度m_*E分别定义为：

$$m^*E=\inf_{G\supset E}mG,\qquad m_*E=\sup_{F\subset E}mF$$

（4）若$m^*E=m_*E$，则称E为（勒贝格）可测集。E的测度记为mE。

定理 8 有界集E可测的充要条件是：对任意集A，有$m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A-E)$（称为Caratheodory条件）

定理 9 （1）若E_1，E_2可测，且$E_1\subset E_2$，则

$m(E_2-E_1)=mE_2-mE_1$ （可减性）

$mE_1\leqslant mE_2$ （单调性）

（2）若$E=\bigcup_k E_k$，每个E_k可测，则E可测，且

$$m\bigcup_k E_k \leqslant \sum_k mE_k \qquad \text{(半可加性)}$$

特别地，若每个E_k互不相交，则有

$$m\bigcup_k E_k = \sum_k mE_k \qquad \text{(完全可加性)}$$

(3) 若$\{E_k\}$为可测集列，则$\bigcap_k E_k$可测；

(4) 若$\{E_n\}$为渐张可测集列，则

$$m\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{n\to\infty} mE_n$$

(5) 若$\{E_n\}$为渐缩可测集列，且$mE_1<\infty$，则

$$m\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{n\to\infty} mE_n$$

由开集和闭集经过至多可列次并或交运算所得到的集统称为波雷尔(Borel)集，特别地，称可列个开集的交为G_δ集，可列个闭集的并为F_σ集。

定理10 设E为可测集，则存在G_δ集A与F_σ集B，满足$A\supset E\supset B$，且$mE=mA=mB$。

直线上无界点集的测度 设E为一维无界集，$I_\alpha=(-\alpha,\alpha)$，若对任何$\alpha$，$E\cap I_\alpha$可测，则称$E$可测，其测度定义为：

$$mE=\lim_{\alpha\to\infty} m(E\cap I_\alpha)$$

利用选择公理和测度对平移的不变性，可以在任何一个区间中构造出勒贝格不可测集。

R^1中点集测度的概念可以推广到R^n中去。

环上的测度 设X是基本集，$\mathscr{R}$是X的某些子集所成的环（或σ环），若$\mathscr{R}$上定义的集函数μ（μ可为无穷大）满足

(i) $\mu\phi=0$；

(ii) 对任何$E\in\mathscr{R}$，$\mu E\geqslant 0$；

(iii) 对$\mathscr{R}$中任何互不相交的集列$\{E_n\}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$，

有
$$\mu\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n$$

则称μ为环（或σ环）$\mathscr{R}$上的测度。集E的μ测度记为μE。

定理11 σ环$\mathscr{R}$上的μ测度具有定理9中所列的勒贝格测度m的那些性质。

σ环上的外测度 设X是基本集，$\mathscr{R}_\sigma$是由X的某些子集所成的σ环，λ是定义在$\mathscr{R}_\sigma$上的集函数。若下列三个条件满足：

(i) $\lambda E\geqslant 0$（$E\in\mathscr{R}_\sigma$），$\lambda\phi=0$

(ii) $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n$（$E_n\in\mathscr{R}_\sigma$）

(iii) 若$E_1\subset E_2$，则$\lambda E_1\leqslant\lambda E_2$（$E_1,E_2\in\mathscr{R}_\sigma$）

则称λ为$\mathscr{R}_\sigma$上的外测度。（当$\mathscr{R}_\sigma$为X的一切子集所成的σ环时，称λ为X上的外测度）

λ可测集 设λ是σ环$\mathscr{R}_\sigma$上的外测度，若对一切$A\in\mathscr{R}_\sigma$，有
$$\lambda A=\lambda(A\cap E)+\lambda(A-E)$$
则称$E\in\mathscr{R}_\sigma$是λ可测的。

定理12 设λ是σ环$\mathscr{R}_\sigma$上的外测度，μ为一切λ可测集的类，则

(i) μ为σ环；

(ii) 设$\{E_n\}$为μ中互不相交的集列，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则

对任何 $A\in\mathscr{R}\sigma$，有

$$\lambda(A\cap E)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_n)$$

(iii) λ 限制在μ上为测度。

测度的扩张 设$\mathscr{R}$是X的某些子集所成的环，μ 是 $\mathscr{R}$上的测度，则集类

$$H(\mathscr{R})=\left\{E\;\middle|\;E\subset X,\;E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\;A_n\in\mathscr{R}\right\}$$

是σ环。对$E\in H(\mathscr{R})$，令

$$\mu^*E=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n\;\middle|\;A_n\in\mathscr{R},\;\text{且}E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}$$

则μ^*是σ环$H(\mathscr{R})$上的一个外测度，称为由μ导出的外测度，且当$E\in\mathscr{R}$时，有$\mu^*E=\mu E$。

一切μ^*可测集的类μ是σ环。μ包含由$\mathscr{R}$所产生的σ环$S(\mathscr{R})$，并且μ^*在$S(\mathscr{R})$上的限制是μ的扩张。对σ有限的测度来说，这种扩张还是唯一的。

二、例题、习题与解法

1. 证明下列关系：

(i) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

证法一 $x\in(A-B)\cap(C-D)\Leftrightarrow x\in A-B$ 且$x\in C-D$
$\Leftrightarrow x\in A,\ x\overline{\in}B,\ x\in C,\ x\overline{\in}D\Leftrightarrow x\in A\cap C,$
$x\overline{\in}B\cup D\Leftrightarrow x\in(A\cap C)-(B\cup D)$

于是，所给等式成立。

证法二 $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(C\cap\mathscr{C}D)$
$=(A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}D)$

$$=(A\cap C)\cap\mathscr{C}(B\cup D)=(A\cap C)-(B\cup D)$$

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

证 $x\in(A\cap B)\cup C\Leftrightarrow x\in A\cap B$或$x\in C$

$\Leftrightarrow x\in A$且$x\in B$，或$x\in C\Leftrightarrow x\in A\cup C$且$x\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$

于是，所给等式成立。

(iii) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$

证法一 $x\in A-(B-C)\Rightarrow x\in A$，$x\overline{\in}B-C$

$\Rightarrow x\in A$，$x\overline{\in}B$或$x\in A$，$x\in B$，$x\in C$

$\Rightarrow x\in A-B$或$x\in C\Rightarrow x\in(A-B)\cup C$

由x的任意性，包含关系得证。

证法二 $A-(B-C)=A\cap\mathscr{C}(B\cap\mathscr{C}C)$

$=A\cap(\mathscr{C}B\cup C)=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(A\cap C)$

$\subset(A\cap\mathscr{C}B)\cup C=(A-B)\cup C$

(iv) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$

证 $(A-B)-(C-D)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap\mathscr{C}(C\cap\mathscr{C}D)$

$=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(\mathscr{C}C\cup D)$

$=(A\cap\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C)\cup(A\cap\mathscr{C}B\cap D)$

$\subset(A\cap\mathscr{C}C)\cup(\mathscr{C}B\cap D)=(A-C)\cup(D-B)$

(v) 问$(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充要条件是什么？

解 由(iii)知，等式右边$=(A-B)\cup(A\cap C)$，左边$=(A-B)\cup C$，可见$A\cap C=C$，即$C\subset A$是等式成立的充分条件。

下证$C\subset A$也是等式成立的必要条件。

用反证法，假设$C\not\subset A$，则有$x\in C$且$x\overline{\in}A$，从而$x\overline{\in}A$

$-B$且$x \overline{\in} A\cap C$，于是，$x \overline{\in}(A-B)\cup(A\cap C)$。而$x\in(A-B)\cup C$，故等式不成立。

2. 设给出集E与任意一组集A_α，$\alpha\in I$，问关系式

$$E\cup(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$$

是否恒成立？

解 上式恒成立。事实上，

$$x\in\text{左边}\Rightarrow x\in E\text{或}x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Rightarrow x\in E$$

$$\text{或}x\in A_\alpha(\forall\alpha\in I)\Rightarrow x\in E\cup A_\alpha(\forall\alpha\in I)$$

$$\Rightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)\Rightarrow x\in\text{右边};$$

反之，$x\in$右边$\Rightarrow x\in E\cup A_\alpha(\forall\alpha\in I)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{若}x\in E,\text{则}x\in E\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\\ \text{若}x\overline{\in}E,\text{则}x\in A_\alpha(\forall\alpha\in I),\text{从而}x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\end{cases}$$

$\Rightarrow x\in$左边。

3. 试作下列各题中集合间的一一对应：

(i) $[0,1]$与$(0,1)$；

(ii) $[a,b]$与$(-\infty,\infty)$；

(iii) 开上半平面与单位圆。

解 (i) 设$(0,1)$中的有理点的全体为$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，则$[0,1]$中的有理点的全体为$\{0,1,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots,\}$，作对应：

$$0\longleftrightarrow r_1,\quad 1\longleftrightarrow r_2,\quad r_1\longleftrightarrow r_3,\quad\cdots,\quad r_n\longleftrightarrow r_{n+2},\quad\cdots$$

再让$(0,1)$中的无理点与$[0,1]$中的无理点自身对应，这样就建立了$[0,1]$与$(0,1)$间的一一对应。

(ii) 先建立$[a,b]$与(a,b)间的一一对应（方法同

(i))，再作(a,b)到$(-\infty,\infty)$的映射：

$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{x-b}{b-a}+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad x\in(a,b)$$

这样就建立了$[a,b]$与$(-\infty,\infty)$间的一一对应。

(iii) 据复变函数的知识，映射$w=\dfrac{Z-i}{iZ-1}$实现了开上半平面与单位圆间的一一对应。

4. 下列各集能否同自然数集或$[0,1]$构成一一对应：

(i) 以有理数为端点的区间集；

(ii) 闭正方形$[0,1;\ 0,1]$.

如果可能，试作这种对应方法。

解 (i) 以有理数为端点的区间集能同自然数集构成一一对应，方法如下：

设有理数的全体为$\{r_1,\ r_2,\ r_3,\cdots\}$，$A_{ij}$表示以$a_i$和$a_j$ $(a_i<a_j)$为端点的区间，则以有理数为端点的区间全体为

$$\begin{array}{lllll} A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & A_{15}, & \cdots \\ & A_{23}, & A_{24}, & A_{25}, & \cdots \\ & & A_{34}, & A_{35}, & \cdots \\ & & & A_{45}, & \cdots \\ & & & & \cdots\cdots \end{array}$$

将这些区间排列成：$A_{12},A_{13},A_{23},A_{14},A_{24},A_{34},\ \cdots$，便建立了以有理数为端点的区间集与自然数集的一一对应。

(ii) 闭正方形$[0,1;\ 0,1]$与$[0,1]$能构成一一对应，方法如下：

把闭正方形分解为互不相交的三部分：

$$A=\{(x,y):\ 0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1\}$$

$B=\{(0,y):\ 0\leqslant y\leqslant 1\}\qquad C=\{(x,0):\ 0<x\leqslant 1\}$

①首先建立$A=\{(x,y):\ 0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1\}$与半闭区间$(0,1]$的一一对应。

若把从某一位起后面全是0的二进小数叫做二进有限小数，否则称二进无限小数，那么，$(0,1]$中的实数与二进无限小数是一一对应的。

对二进无限小数$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$（有无穷多个a_i为1），我们这样给它加括号，使得每个括号中只有最后一个数码为1，前面的数码全为0。例如，二进无限小数

$$0.1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\cdots\cdots$$

加括号成$0.(1)(01)(1)(0001)(001)\cdots$，记作为

$$0.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\cdots\cdots$$

显然，每个二进无限小数，均可加括号成为一个这样的符号序列$0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$；反之，每个这样的符号序列均可去掉括号成为一个二进无限小数。

对每个$(x,y)\in A$，把x,y均表为二进无限小数，并加括号成符号序列：

$$x=0.\sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_n'\cdots\qquad y=0.\sigma_1''\sigma_2''\cdots\sigma_n''\cdots$$

令$t=0.\sigma_1'\sigma_1''\sigma_2'\sigma_2''\cdots\sigma_n'\sigma_n''\cdots$，再去掉这个符号序列的括号，便得到一个二进无限小数，从而确定了一个实数$t\in(0,1]$。

反之，对于每个$t\in(0,1]$，把t表为二进无限小数，并加括号成符号序列：

$$t=0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$$

令$x=0.\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1}\cdots$，$y=0.\sigma_2\sigma_4\cdots\sigma_{2n}\cdots$，并去掉

这两个符号序列的括号，便得到两个二进无限小数，从而确定了一点$(x,y)\in A$。

②建立闭正方形在y轴上的点集$B=\{(0,y): 0\leqslant y\leqslant 1\}$与区间$[-1,0]$的一一对应。

这是容易的，只要令$y=t+1$，$t\in[-1,0]$；

③建立$C=\{(x,0): 0<x\leqslant 1\}$与区间$(1,2]$的一一对应。

这也是容易的，只要令$x=t-1$，$t\in(1,2]$.

综合①②③，我们建立了闭正方形$[0,1; 0,1]$与闭区间$[-1,2]$的一一对应，再作$[-1,2]$到$[0,1]$的线性映射$y=\frac{1}{3}(x+1)$，$x\in[-1,2]$就完成了。

5. 证明整系数多项式全体是可列集。

证 设n次整系数多项式为

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

由整数集Z的可列性知零次整系数多项式的全体$P_0=\{p_0(x)=a_0; a_0\in Z\}$为可列集。又据可列个可列集之并为可列集，可知一次整系数多项式的全体

$$P_1=\{p_1(x)=a_0+a_1x: a_0, a_1\in Z, a_1\neq 0\}$$

为可列集。依此由数学归纳法可证得n次整数多项式全体P_n为可列集，而一切整系数多项式所成之集P又是可列个可列集之并：

$$P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$$

从而是可列的。

6. 设$A=\{0,1\}$，试证一切排列$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$，$a_n\in A$所成的集的势为$\aleph$.

证 把一切排列与二进小数作对应：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\longleftrightarrow 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

$$a_n\in A=\{0,1\}$$

因二进小数$\{0.a_1a_2\cdots a_n\cdots:a_n\in A\}$与$[0,1]$对等，故其势为$\aleph$，从而一切排列的势为$\aleph$.

7. 设$C[0,1]$表示$[0,1]$上一切连续函数所成的类，试证它的势为$\aleph$.

证 先证明全体实数列所成之集H对等于$(0,1)$.

设H的子集

$$B=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\ x_n\in(0,1),\ n=1,2,\cdots\}$$

作B到H的映射ϕ:

$$\phi(x)=\left(\mathrm{tg}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \mathrm{tg}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots,\right.$$

$$\left.\mathrm{tg}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots\right)$$

显然ϕ是B到H的一对一映射，故$H\sim B$.

下证$B\sim(0,1)$.

首先，把$(0,1)$中的任一数x与B中的元$(x,x,\cdots,x,\cdots)$对应，便知$(0,1)$对等于B的一个子集。

反之，对B中任何$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，用十进无限小数表示$x_n$:

$$x_1=0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots$$

$$x_2=0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n=0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

作无限小数 $\psi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1n}\cdots$，显然，$\psi(x)\in(0,1)$，且当$x\neq y$时，$\psi(x)\neq\psi(y)$，故$B$对等于$(0,1)$的一个子集，于是由Bernstein定理知$B\sim(0,1)$，从而

$$\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$$

现在来证明$C[0,1]$的势为$\aleph$.

事实上，因一切常数函数$f(x)=k$为$[0,1]$的连续函数，$\overline{\overline{C[0,1]}}\geqslant\aleph$是明显的。另一方面，把$[0,1]$中全体有理数排列成$r_1,r_2,r_3,\cdots$，对于$C[0,1]$中任一个$f(x)$，令实数列$(f(r_1),f(r_2),f(r_3),\cdots)$与之对应，由函数的连续性可知，不同的函数对应的实数列也不同(若$f(x)$与$g(x)$在$[0,1]$中一切有理点上取值相同的话，便能由函数的连续性推得$f(x)\equiv g(x)$)。于是$C[0,1]$对等于全体实数列H的一个子集，故有 $\overline{\overline{C[0,1]}}\leqslant\overline{\overline{H}}=\aleph$.

据Bernstein定理，$\overline{\overline{C[0,1]}}=\aleph$.

8. 证明任何点集的内点全体是开集。

证 设E为任一点集，E^0为E的内点所成之集。任设$x_0\in E^0$，则x_0为E之内点，故有(α,β)，使得$x_0\in(\alpha,\beta)\subset E$.

对于任意的$x\in(\alpha,\beta)$，显然(α,β)是x的邻域，因此，x为E之内点，即$x\in E^0$，从而$(\alpha,\beta)\subset E^0$。

综上，对E^0中的任一点x_0，有(α,β)，使得$x_0\in(\alpha,\beta)\subset E^0$. 于是，$x_0$为$E^0$的内点，$E^0$为开集。

9. 设G_1,G_2是R_1中的开集，且$G_1\subset G_2$，试证G_1的每个构成区间必含在G_2的某个构成区间之中。

证 设(α_1,β_1)是G_1的任一构成区间，$x\in(\alpha_1,\beta_1)$，又设G_2中含x的构成区间是(α_2,β_2)。现证$(\alpha_1,\beta_1)\subset$

(α_2,β_2).

用反证法，假设 $\alpha_1 < \alpha_2$，由于 $\alpha_2 < x$，有 $\alpha_2 \in (\alpha_1, x) \subset (\alpha_1,\beta_1) \subset G_1 \subset G_2$，这是不可能的（因 (α_2,β_2) 是 G_2 的构成区间，$\alpha_2 \notin G_2$），于是 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$.

同理可证 $\beta_1 \leqslant \beta_2$。因而 $(\alpha_1,\beta_1) \subset (\alpha_2,\beta_2)$

10. 设 F_1，F_2 是 R^n 中闭集，且 $F_1 \cap F_2 = \phi$，试证存在开集 G_1，G_2，使 $G_1 \cap G_2 = \phi$，而 $G_1 \supset F_1$，$G_2 \supset F_2$.

证法一 因 $F_1 \cap F_2 = \phi$，F_1，F_2 为闭集，则对 $x \in F_1$，有 $\rho(x, F_2) > 0$；对 $y \in F_2$，有 $\rho(y, F_1) > 0$。作开邻域 $O(x, r(x))$ 与 $O(y, r(y))$，其中，$r(x) = \frac{1}{2}\rho(x, F_2)$，$r(y) = \frac{1}{2}\rho(y, F_1)$。再令

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} O(x, r(x)),\quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} O(y, r(y))$$

显然，G_1，G_2 都是开集，且 $G_1 \supset F_1$，$G_2 \supset F_2$. 下证 $G_1 \cap G_2 = \phi$。假设不然，则有 $a \in G_1 \cap G_2$，即 $a \in G_1$ 且 $a \in G_2$，则必存在 $x_0 \in F_1$，$y_0 \in F_2$，使得

$$a \in O(x_0, r(x_0)) \text{ 且 } a \in O(y_0, r(y_0))$$

不妨设 $r(x_0) \geqslant r(y_0)$，则

$$\begin{aligned}\rho(x_0, F_2) &\leqslant \rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, a) + \rho(a, y_0)\\ &< r(x_0) + r(y_0) \leqslant 2r(x_0) = \rho(x_0, F_2)\end{aligned}$$

这是荒谬的，于是结论得证。

证法二 作 R^n 到 R 的连续函数：

$$f(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}$$

则 $f(F_1) = 0$，$f(F_2) = 1$，即 $F_1 = f^{-1}(0)$，$F_2 = f^{-1}(1)$.
现令

$$G_1=f^{-1}((-\infty,\tfrac{1}{2})),\quad G_2=f^{-1}((\tfrac{1}{2},+\infty))$$

由连续函数的性质，开集的原象是开集，知G_1，G_2均为开集，且显然有

$$G_1\cap G_2=\phi,\quad G_1\supset F_1,\quad G_2\supset F_2$$

11. 设$f(x)$是R^1上的实函数，f映开集为开集。问f是否连续？又连续映射是否映开集为开集？

解 映开集为开集的实函数不一定连续。例如，在每个区间$[n,\ n+1]$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）上作康脱三分集P_n，令

$$G_n=[n,n+1]-P_n,\quad P=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}P_n,\quad G=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}G_n$$

则G为开集。设G的构成区间为(a_K,b_K)，$K=1,2,\ \cdots$，在R^1上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-x}{b_K-a_K}\right)\pi & x\in(a_K,b_K),K=1,2,\cdots\\ 0 & x\in P\end{cases}$$

显然，函数f在P的一切点上不连续，但f在R^1上映开集为开集。事实上，设E为R^1中任一开集，$E=\bigcup\limits_{i}(\alpha_i,\beta_i)$，由于$P$不含任何区间，$(\alpha_i,\beta_i)\subset P$的情形是不可能发生的，因此只有两种可能：①$E\subset G$；②$E$的某些构成区间既含有$G$的点又有$P$的点。

①当$E\subset G$时，由本章题9，对任何E的构成区间(α_i,β_i)，必有$(\alpha_i,\beta_i)\subset(a_K,b_K)$（其中$(a_K,b_K)$为$G$的某个构成区间）。据函数的定义，$f$映$(\alpha_i,\beta_i)$为开区间$\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-\alpha_i}{b_K-a_K}\right)\pi,\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-\beta_i}{b_K-a_K}\right)\pi\right)$，

因可列个开区间之并为开集，便知f映开集E为开集。

②当E的构成区间(α_i,β_i)既含有G的点且又有P的点时，由康托集的构造知，区间(α_i,β_i)必含有G的构成区间，于是f映E为开集R^1。

至于连续映射不一定映开集为开集的例子是容易举的。比如$f(x)=\sin x$，在R^1上连续，但映开集$(0,4\pi)$为闭集$[-1,1]$。

12. 设E是康托集的补集的构成区间的中点所成的集，求E'。

解 记康托集为P_0，其补集为G_0。

若$x\in G_0$，则x必属于G_0的某一构成区间(α_i,β_i)。由于在x的邻域(α_i,β_i)中，只有一点$\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}\in E$，故$x$不可能是$E$的聚点。

若$x\in P_0$，由康托集的构造知，x的任一邻域$O(x,\varepsilon)$必含有G_0的某个构成区间(α_i,β_i)，于是必有E的点$\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}\in O(x,\varepsilon)$，故$x$为$E$的聚点。

综上便得$E'=P_0$。

13. 设点集列$\{E_n\}$是有限区间$[a,b]$中的渐缩序列：$E_1\supset E_2\supset\cdots$，且每个$E_n$均为非空闭集。试证交集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$非空。

证法一 在每个E_n中各取一点x_n，则$\{x_n\}$为有界点列，于是存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$x_{n_k}\to x_0$，则对任何n，当$n_k>n$时，$x_{n_k}\in E_{n_k}\subset E_n$，故$x_0$为$E_n$的聚点。由$E_n$为闭集知$x_0\in E_n$，因而$x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，这就证明了$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$非空。

证法二 反设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n=\phi$，以$(a-1,b+1)$为基本集，对每个$E_n$取补，则渐张开集序列$\{\mathscr{C}E_n\}$复盖$[a,b]$，于是存在有限个开集$\mathscr{C}E_{n_1}$，$\mathscr{C}E_{n_2},\cdots,\mathscr{C}E_{n_k}$复盖$[a,b]$，不妨设$n_1<n_2<\cdots<n_K$，则有

$$\mathscr{C}En_K=\bigcup_{i=1}^{K}\mathscr{C}En_i\supset[a,b]$$

注意到$En_K\subset[a,b]$，便知$En_K=\phi$，这与E_n均非空相矛盾。

14. 试证欧几里得空间R^n中每个闭集可表为可列个开集的交，每个开集可表为可列个闭集的并。

证 先证明一个重要结论：对任意集$A\subset R^n$，$d>0$，点集

$$G=\{a:\ \rho(a,A)<d\}$$

必为开集。

事实上，$\forall x\in G$，有$\rho(x,A)<d$，令$h=d-\rho(x,A)$，则$O\left(x,\dfrac{h}{2}\right)\subset G$，故$x$为$G$之内点，从而$G$为开集，且显然有$G\supset A$。

现证前半题。设F为闭集，令$G_n=\{a:\ \rho(a,F)<\dfrac{1}{n}\}$，$(n=1,2,\cdots)$，由上述可知，$G_n$为开集，且$G_n\supset F$。下证$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$。事实上，$\forall x\in F$，有$\rho(x,F)=0<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，于是$x\in G_n(n=1,2,\cdots)$，$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$。反之，$\forall x\in \underset{n=1}{\overset{\infty}{{}_n\subset}} G$，则$x\in G_n(n=1,2,\cdots)$，$\rho(x,F)<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$。令$n\to\infty$，得$\rho(x,F)=0$，因$F$为闭集，知$x\in F$。

再证后半题。设G为开集，则$\mathscr{C}G$为闭集，由前半题有

$$\mathscr{C}G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\text{（其中}G_n\text{为开集）}$$

于是

$$G=\mathscr{C}\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n\text{（其中}\mathscr{C}G_n\text{显然为闭集）}$$

［注］ 在R^1中，用下法证明较为简单：

先设G为开集，G的结构表示为$G=\bigcup\limits_{K}(\alpha_K,\beta_K)$。对每个开区间$(\alpha_K,\beta_K)$，有$(\alpha_K,\beta_K)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\alpha_K+\frac{1}{n},\beta_K-\frac{1}{n}]$。

于是

$$G=\bigcup_{K}\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_K+\frac{1}{n},\beta_K-\frac{1}{n}]$$

再设F为闭集，则$\mathscr{C}F$为开集，由上述已证的结果，有

$$\mathscr{C}F=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m\text{（其中}F_m\text{为闭集）}$$

于是

$$F=\mathscr{C}\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m=\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{C}F_m\text{（其中}\mathscr{C}F_m\text{显然是开集）}$$

15. 称X的子集所成之类$\mathscr{A}$有性质(σ)：若X非$\mathscr{A}$中有限个元的并。试证：若$\mathscr{A}$有性质(σ)时，则存在X的子集的极大类$\mathscr{B}$具有性质(σ)且包含$\mathscr{A}$，并证明，若$A_1,A_2,\cdots,A_n\subset X$，且$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\in\mathscr{B}$，则必有某个$A_i\in\mathscr{B}$。

证 (1) 设具有性质(σ)且包含$\mathscr{A}$的X的一切子集类所成之集为X_0：

$$X_0=\{\mathscr{D}:\mathscr{D}\supset\mathscr{A}\text{，且}X\text{非}\mathscr{D}\text{中有限个元的并}\}$$

题目的意思就是要证明X_0有极大元$\mathscr{B}$。

显然，X_0中元按平常集的包含关系成一非空半序集，对X_0中任一全序子集$\{\mathscr{D}_\alpha\}$，令$\mathscr{D}_0=\bigcup\limits_{\alpha}\mathscr{D}_\alpha$，下证$\mathscr{D}_0$为$\{\mathscr{D}_\alpha\}$的上确界。

对于每个$\mathscr{D}_\alpha$，$\mathscr{D}_\alpha\subset\mathscr{D}_0$是显然的，只要证$\mathscr{D}_\alpha\in X_0$就行了。首先有$\mathscr{D}_0\supset\mathscr{A}$，其次$\mathscr{D}_0$有性质$(\sigma)$，若不然，则有$\mathscr{D}_0$的有限个元$A_1,A_2,\cdots,A_m$，使$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=X$，设$A_1\in\mathscr{D}_{\alpha 1}$，$A_2\in\mathscr{D}_{\alpha 2}$，$\cdots,Am\in\mathscr{D}_{\alpha m}$，由于$\{\mathscr{D}_\alpha\}$为全序集且$m$为有限，故这$m$个$\mathscr{D}_\alpha$中必有一个$\mathscr{D}_{\alpha K}$包含其余的$m-1$个，于是$A_1,A_2,\cdots$，$A_m$均属于$\mathscr{D}_{\alpha K}$，这与$\mathscr{D}_{\alpha K}$具有性质$(\sigma)$相矛盾。

这就证明了$\{\mathscr{D}_\alpha\}$有上确界，从而由Zorn引理知X_0是极大元。

（2）反设$A_1,A_2,\cdots$，A_n均不属于$\mathscr{B}$，则$\mathscr{B}\cup\{A_1\}$，$\mathscr{B}\cup\{A_2\},\cdots,\mathscr{B}\cup\{A_n\}$中至少有一个具有性质$(\sigma)$。若不然，则有

$$X=B_{i_1}\cup B_{i_2}\cup\cdots\cup B_{ik_i}\cup A_i$$

（各B_{ik_i}为$\mathscr{B}$的元，$i=1,2,\cdots,n$）

上式对$i=1,2,\cdots,n$作交，可得

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}(B_{i_1}\cup B_{i_2}\cup\cdots\cup B_{ik_i})\cup(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$$

因$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\in\mathscr{B}$，且每个$B_{ik_i}\in\mathscr{B}$，上式说明$X$是$\mathscr{B}$中有限个元之并，这与$\mathscr{B}$具有性质$(\sigma)$相矛盾。

现设$\mathscr{B}\cup\{A_k\}$具有性质(σ)，又$\mathscr{B}\cup\{A_k\}\supset\mathscr{B}\supset\mathscr{A}$，故$\mathscr{B}\cup\{A_k\}\in X_0$，这与$\mathscr{B}$是$X_0$的极大元相矛盾，于是有某个$A_i\in\mathscr{B}$。

16. 试以Zorn引理证Zermelo公理。

证 设$X=\bigcup A$（$A\in\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$中各集两两互不相交），$\mathscr{B}$为含于X中且与每个$A\in\mathscr{A}$至多有一公共元的集所成的类：

$\mathscr{B}=\{B;\ B\subset X$，且与每个$A\in\mathscr{A}$至多有一公共元$\}$

显然$\mathscr{B}$按"包含"关系成一非空半序集。再令$\mathscr{D}$为$\mathscr{B}$的任一非空全序子集，$E_0=\bigcup E(E\in\mathscr{D})$，下证$E_0\in\mathscr{B}$.

$E_0\subset X$是显然的。假设E_0与某个$A\in\mathscr{A}$有两个公共元x_1，x_2，则有$E_1,E_2\in\mathscr{D}$，使$x_1\in E_1,x_2\in E_2$。因$\mathscr{D}$是全序集，不妨设$E_1\subset E_2$，则x_1，$x_2\in E_2$，即E_2与$\mathscr{A}$中某个A有两个公共元，这与$E_2\in\mathscr{D}\subset\mathscr{B}$相矛盾，因此$E_0$与$\mathscr{A}$中每个元至多有一公共元。从而$E_0$为$\mathscr{D}$的上确界。据Zorn引理，$\mathscr{B}$有极大元，设为$M$.

现在证明M与每个$A\in\mathscr{A}$必有一个公共元，若不然，则有某个$A\in\mathscr{A}$，使$M\cap A=\phi$。取$\alpha\in A$，因$\mathscr{A}$中各集互不相交，知$M\cup\{\alpha\}$与每个$A\in\mathscr{A}$至多有一公共元，故$M\cup\{\alpha\}\in\mathscr{B}$，且以$M$为其真子集，这与$M$是$\mathscr{B}$的极大元矛盾了。

综上知，M与每个$A\in\mathscr{A}$有且仅有一个公共元a。对于每个$A\in\mathscr{A}$，令$f(A)=a$，则f就是所求的映射：

f：$\mathscr{A}\to\bigcup A\ A\in\mathscr{A}$，且$f(A)=a\in A$，$\forall A\in\mathscr{A}$

17. 设$\mathscr{A}$是由给定的集的子集所成的类：$A\in\mathscr{A}$指的是A的每一有限子集属于$\mathscr{A}$，试证$\mathscr{A}$含有一极大元。

证 设$\{A_\alpha\}$是$\mathscr{A}$的任一全序子集，令$A_0=\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$，下证$A_0=\sup\{A_\alpha\}$，对于$\{A_\alpha\}$中的每一元，$A_\alpha\subset A_0$是明显的，因此只要证明$A_0\in\mathscr{A}$就行了。设$A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为$A_0$的任一有限子集，则有$\{A_\alpha\}$中的$A_{\alpha_i}$，使得$a_i\in A_{\alpha_i}$

（$i=1,2,\cdots,n$）。由$\{A_\alpha\}$的全序性知$a_1,a_2,\cdots a_n$均属于某个A_{α_i}，于是由$A_{\alpha_i}\in\mathscr{A}$知$A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\in\mathscr{A}$。故由Zorn引理，$\mathscr{A}$含有一极大元。

18. 试证：设X为非空半序集，若X中每一非空全序子集有上界，则X有极大元（Zorn引理的另一形式）。

证 和参考文献[1]第一章定理6.5的证法相同，仅需将“$x_0=\sup X_0$”改为“x_0是X_0的上界。”

19.（1）设E是坐标平面上曲线$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$上一切点所成之集，求$E'$。

（2）$E=\left\{p+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}: p\in N, m\in N, n\in N\right\}$，求$E',E'',E'''$。

答：（1）$E'=E\cup\{(x,y): x=0,-1\leqslant y\leqslant 1\}$

（2）$E'=\left\{p+\dfrac{1}{m}: p\in N, m\in N\right\}$，

$$E''=N,\ E'''=\phi.$$

20. 证明：直线上既开又闭的集合只有ϕ与R。

提示 可用反证法。

21.（1）若非空点集A的每一点均为孤立点，称A为孤立点集。孤立点集是否至多可列？

（2）孤立点集的导集能否为不可列集？

（3）直线上是否存在这样的点集E，使得$E'=(0,1)$？

（4）设开集$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$，是否恒有

$$G'=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\ \beta_n]$$

答：（1）孤立点集至多可列。

（2）能，如康脱开集G_0的构成区间的中点所成之集E（参见第12题）。

（3）不存在。

（4）未必，如$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$。

22. 设A,B均为非空闭集，且至少有一个有界，则必有$a\in A$，$b\in B$，使$\rho(a,b)=\rho(A,B)$。

提示 据$\rho(A,\ B)$的定义，对每个自然数n，有$x_n\in A$，$y_n\in B$，使$\rho(A,B)\leqslant\rho(x_n,y_n)<\rho(A,B)+\frac{1}{n}$。设$A$有界，则$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to a$，再证明相应的$\{y_{n_k}\}$为有界点列，于是有$\{y_{n_k}\}$的子序列$y_{n'_k}\to b$。

23.（1）集E的一切内点所成之集$\mathring{E}$是含于E内的一切开集之并。

（2）集E的闭包$\overline{E}$是包含E的一切闭集之交。

24.（1）开区间(a,b)不能表为可列个不相交的闭区间之并。

（2）闭区间$[a,b]$不能表为可列个不相交的闭区间之并。

提示 可用反证法证（1），再用反证法及（1）证（2）。

25. 设定义在R上的函数$f(x)$只取整数值，则$f(x)$的连

续点之集为开集；间断点之集为闭集。

提示 设$x_0\in E=\{x: x\in R, f$在x处连续$\}$且$f(x_0)=n_0$（整数），由连续性及已知条件可知，存在$\delta>0$，使得对一切$x\in O(x_0,\delta)$有$f(x)=n_0$，于是f在$O(x_0,\delta)$上连续。

26. 设M是$[a,b]$上一切单调函数所成之集，则$\overline{\overline{M}}=\aleph$，

提示 令$[a,b]$中全体有理点为$r_1, r_2,\cdots$，因单调函数f的间断点可列，故可设其无理间断点为$x_1,x_2,\cdots$，则函数f由实数列$\{f(r_1),f(x_1),f(r_2),f(x_2),\cdots\}$所确定，由实数列全体之势为$\aleph$，便得$\overline{\overline{M}}\leqslant\aleph$.

至于$\overline{\overline{M}}\geqslant\aleph$是易证的。

27. 设$G_1,G_2,\cdots, G_n,\cdots$是直线上一列开集，每个$G_n$在直线上处处稠密，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$也处处稠密。

提示 设I为任一开区间，由题设，在I中可依次作出一列闭区间$[\alpha_n,\beta_n]$，使$[\alpha_n,\beta_n]\subset(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})\cap G_n$，这样作出的闭区间必有公共点$C\in[\alpha_n,\beta_n]\subset G_n(n=1,2\cdots)$，即$I$中有点$C\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$.

28. 证明：(1) 直线上一切有理数所成之集Q是F_σ型集，但不是G_δ型集。

(2) 直线上一切无理数所成之集是G_δ型集，但不是F_σ型集。

提示 (1) 证Q不是G_δ型集可用反证法：令$P=\{r+\sqrt{2}; r\in Q\}$，则P也是处处稠密的G_δ型集，由上题可知$Q\cap P$也处处稠密，这与$Q\cap P=\phi$相矛盾。

(2) 对(1)中的集取补，由对偶原理可得证。

29. 证明（林得略夫定理）：设点集E被开区间集μ所复盖，则μ中必能选出至多可列个开区间即可复盖E。

提示 对E中每一点x，找出μ中一个开区间I及相应的有理数R和正有理数r，使$O(R,r)\subset I$，因$O(R,r)$至多可列便得结论。

30. 试证：定义在$(-\infty,\infty)$上的单调函数的不连续点至多可列，因而为零测度集。

证 先对$(-\infty,\infty)$上的递增函数$f(x)$来证明。

设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的不连续点的集合为A，由数学分析的知识知：$x\in A$的充要条件是$f(x-0)<f(x+0)$，且对任意的x_1，$x_2\in A$，若$x_1<x_2$，则$f(x_1-0)<f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)<f(x_2+0)$。因此，对每一个$x\in A$，对应于直线上一个开区间$(f(x-0),f(x+0))$，且这些开区间是互不相交的。于是，据直线上互不相交的开区间至多可列，便知A至多为可列集。

对$(-\infty,\infty)$上的递减函数，证法类同。

31. 设E_1,E_2可测，试证

$$m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2-m(E_1\cap E_2)$$

证 因$E_1\cup E_2=E_1\cup(E_2-E_1\cap E_2)$，$E_1$与$E_2-E_1\cap E_2$不相交，故

$$\begin{aligned}m(E_1\cup E_2)&=mE_1+m(E_2-E_1\cap E_2)\\&=mE_1+mE_2-m(E_1\cap E_2)\end{aligned}$$

32. 试证可列个零测度集的并仍是零测度集。

证 设$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，$mE_n=0(n=1,2,\cdots)$。由参考文献[1]第二章定理3.4知$E$可测，且

$$mE \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = 0$$

于是由测度的非负性即得$mE=0$。

33. 已知[0,1]中无理点集E的测度为1，试由内、外测度的定义，考察其测度与1任意接近的含于E内的闭集以及包含E的开集的构造是怎样的。

解 (1) 因所求的闭集F要含在无理点集E中，故F一定不含[0,1]中的有理点。又闭集F的测度要与1任意接近，故F必是区间[0,1]减去一个包含一切有理点且测度可以任意小的开集所构成。F的构造方法如下：

设[0,1]中全体有理点为$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$，$\varepsilon$为任意小的正数，作开区间$I_n = (r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})(n=1,2,\cdots)$，

则$G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$为开集，且

$$mG_0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mI_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

令$F=[0,1]-G_0$，这个F就是含于E中且测度与1任意接近的闭集。

(2) 包含E的且测度与1任意接近的开集的取法很多，如 $(0,1)$ $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \qquad (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

等等。

34. 设G_1, G_2是开集，且G_1是G_2的真子集，是否一定

有$mG_1 < mG_2$?

解 不一定有$mG_1 < mG_2$.例如

$$G_1 = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1), \quad G_2 = (0, 1)$$

虽然G_1是G_2的真子集，但$mG_1 = mG_2 = 1$.

35. 对任意开集G，是否有$m\overline{G} = mG$成立？

解 等式不一定成立，如本章第33题中作出的开集G_0，由于G_0包含了[0,1]中一切有理点，可知$\overline{G_0} \supset [0,1]$，于是$m\overline{G_0} \geq 1$，但$mG_0 < \varepsilon$.

36. 如把外测度的定义改为"有界集E的外测度是包含E的闭集的测度的下确界"，是否合理？

解 这种改法不合理。如设[0,1]中有理点集为Q，无理点集为I，则$[0,1] = Q \cup I$，显然，任何包含Q的闭集F，必有

$$F \supset \overline{Q} = [0,1]$$

因此，如采用上述方法定义外测度，就有$m^*Q = 1$，但$m_*Q = 0$，这就使Q成为不可测集。即使采用其它方法定义内测度，使Q与I均可测，那将出现$mQ + mI = 1 + 1 = 2$，而$m(Q \cup I) = m[0,1] = 1$，测度的有限可加性又不成立了。

37. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限个互不相交的可测集，且$E_k \subset A_k$，$k = 1, 2, \cdots, n$，试证

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} m^*E_k$$

证法一 据外测度的半可加性有

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \leq \sum_{k=1}^{n} m^*E_k$$

又令$E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$，则对任一开集$G\supset E$，有

$$G\supset\bigcup_{k=1}^{n}(G\cap E_k)$$

注意到各$G\cap E_k$互不相交，且$G\cap A_k\supset E_k$（$k=1,2,\cdots,n$），便有

$$mG\geqslant m\bigcup_{k=1}^{n}(G\cap A_k)=\sum_{k=1}^{n}m(G\cap A_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}m^*(G\cap A_k)\geqslant\sum_{k=1}^{n}m^*E_k$$

因G是任一包含E的开集，故

$$m^*E=\inf_{G\supset E}mG\geqslant\sum_{k=1}^{n}m^*E_k$$

综上即得

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}m^*E_k$$

证法二 当$n=2$时，因A_1可测，据参考文献[1]第二章定理3.5，有

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*((E_1\cup E_2)\cap A_1)$$

$$+m^*\left((E_1\cup E_2)\cap\mathscr{C}A_1\right)$$

$$=m^*E_1+m^*E_2$$

当$n>2$时，用数学归纳法可证得。

38. 设G是开集，E是零测度集，试证$\overline{G}=(\overline{G-E})$。

证 因$G\supset G-E$，$\overline{G}\supset\overline{G-E}$为显然。另一方面，因为$G$是开集，有$\overline{G}=G\cup G'=G'$。任取$x\in\overline{G}$。在$x$的任一邻域$(\alpha,\beta)$中，必有$x_0\neq x$，而$x_0\in G\cap(\alpha,\beta)$，又因$G\cap(\alpha,\beta)$为开集，必存在$x_0$的邻域$(a,b)$，使得$(a,b)\subset G\cap(\alpha,\beta)$。由$mE=0$可推知，在$(a,b)$中必有异于$x$的点$y\in G-E$（否则，$mE\geqslant m(a,b)>0$）。因$(a,b)\subset(\alpha,\beta)$，故$y\in(\alpha,\beta)$，于是

$$x\in(G-E)'\subset\overline{G-E},\quad \overline{G}\subset\overline{G-E}$$

综上等式得证。

39. 设$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$，试证

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_n m^*E_n$$

证 令$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，由$E_n\subset E$，$m^*E_n\leqslant m^*E$（$n=1,2,\cdots$），有

$$\lim_n m^*E_n\leqslant m^*E=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

又作开集$G_n\supset E_n$，且$mG_n\ \ m^*E_n+\varepsilon$（$n=1,2,\cdots$），

并令 $$P_k=\bigcap_{n=k}^{\infty}G_n$$

则 $$P_k\subset G_k\qquad(k=1,2,\cdots)$$

于是

$$mP_k\leqslant mG<m^*E_k+\varepsilon\quad(k=1,2,\cdots)$$

由题设知，当$n\geqslant k$时，有$G_n\supset E_k$，故

$$P_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}G_n\supset E_k \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty}P_k\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=E$$

且$P_1\subset P_2\subset\cdots$，由参考文献[1]第二章定理3.6(i)得

$$m^*E\leqslant m\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k=\lim_k mP_k\leqslant\lim_k m^*E_k+\varepsilon$$

由ε的任意性，便有

$$m^*E\leqslant\lim_k m^*E_k$$

综上得

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=m^*E=\lim_n m^*E_n$$

40. 设E为一维有界集，$I_1,I_2,\cdots$是闭区间列（可以相交），其并复盖E，试证

$$m^*E=\inf_{\bigcup I_k\supset E}\sum_{k=1}^{\infty}mI_k$$

对二维情形如何？

证 因$E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$，由外测度的单调性和半可加性有

$$m^*E\leqslant m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*I_k=\sum_{k=1}^{\infty}mI_k$$

取下确界便得

$$m^*E\leqslant\inf_{\bigcup I_k\supset E}\sum_{k=1}^{\infty}mI_k$$

又由外测度的定义，对任意正数ε，有开集$G\supset E$，使

$mG < m^*E + \varepsilon$。设G的结构表示为 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k, \beta_k)$，作$I_k = [\alpha_k, \beta_k]$（$k = 1, 2, \cdots$），则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset G \supset E$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} mI_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \alpha_k) = mG < m^*E + \varepsilon$$

从而

$$\inf_{\cup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k < m^*E + \varepsilon$$

由 ε 的任意性得

$$m^*E \geq \inf_{\cup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k$$

综上即得所要证明的等式。

对二维情形，将上述闭区间列$I_1, I_2, \cdots$改为闭长方形即可。

41. 试作一闭集$F \subset [0, 1]$，使F中不含任何开区间，而 $mF = 1/2$.

解 首先在$[0, 1]$的中央挖去长为$\frac{1}{4}$的开区间$\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$，然后在余下的两个闭区间的中央各挖去长为$\frac{1}{4^2}$的开区间$\left(\frac{5}{32}, \frac{7}{32}\right)$，$\left(\frac{25}{32}, \frac{27}{32}\right)$，再在余下的 4 个闭区间的中央各挖去长为$\frac{1}{4^3}$的开区间（共4个）。

一般地，在第 n 次挖去的开区间长为$\frac{1}{4^n}$（共2^{n-1}个）。这样一直挖下去，就得到一列开区间，令这些开区间的并为

$$G=\left(\frac{3}{8},\ \frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{5}{32},\ \frac{7}{32}\right)$$

$$\cup\left(\frac{25}{32},\ \frac{27}{32}\right)\cup\cdots$$

则

$$mG=\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots+2^{n-1}\frac{1}{4^n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots=\frac{1}{2}$$

现令$F=[0,1]-G$，显然F为不含任何开区间的闭集，且

$$mF=m[0,1]-mG=1/2$$

故这个F即为所求之闭集。

42. 如把外测度的定义改为：m^*E为包含E的可测集测度的下确界，问在这个新意义下的外测度与原来的外测度有何关系？

解 两者相等。事实上，设 $\inf\limits_{\substack{A\supset E\\ A\text{可测}}} mA=a$，由于可测集类包含开集类，故有

$$\inf_{\substack{G\supset E\\ G\text{为开集}}} mG\geqslant \inf_{\substack{A\supset E\\ A\text{可测}}} mA=a$$

又因 $\inf\limits_{\substack{A\supset E\\ A\text{可测}}} mA=a$，对任意$\varepsilon>0$，存在可测集$A_1\supset E$，使 $mA_1<a+\frac{\varepsilon}{2}$，因$A_1$可测，必存在开集$G_1\supset A_1\supset E$，

使$mG_1 \leqslant mA_1+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon$。由 ε 的任意性便得

$$\inf_{\substack{G\supset E\\ G\text{为开集}}} mG \leqslant a$$

综上得：

$$\inf_{\substack{G\supset E\\ G\text{为开集}}} mG = a = \inf_{\substack{A\supset E\\ A\text{可测}}} mA$$

43. 下列各题中给出了在 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上集函数 λ 的例子，问哪些是外测度，哪些不是：

(i) X是任意非空集，$\mathscr{R}_\sigma$是X的一切子集的类，对于$\mathscr{R}_\sigma$中任意元E，令 $\lambda E=\chi_E(x_0)$，这里 $x_0\in X$ 是固定的一点。$\chi_E(x)$ 是集E的特征函数：$\chi_E(x)=1$（当 $x\in E$），$\chi_E(x)=0$（当 $x\overline{\in} E$）。

解 λ 是外测度，验证如下：

(1) $\lambda E\geqslant 0$，$\lambda\phi=0$为显然。

(2) 若 $x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则存在自然数$n_0$，使$x_0\in E_{n_0}$，于是

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1=\lambda E_{n_0}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n$$

若 $x_0\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则 $x_0\overline{\in}E_n$，$\lambda E_n=0(n=1,2,\cdots)$，

于是

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n \qquad \text{（半可加性成立）}$$

(3) 设$E_1\subset E_2$，若$x_0\in E_1$，则 $\lambda E_1=\lambda E_2=1$；若

$x_0 \overline{\in} E_1$，则

$$\lambda E_1 = 0 \leqslant \lambda E_2 \quad （单调性成立）$$

(ii) X是正整数集，$\mathscr{R}_\sigma$是X的一切子集的类。对X的任一有限子集E，用$N(E)$表示E中点的个数，令

$$\lambda E = \overline{\lim} \frac{1}{n} N\left(E \cap \{1,2,\cdots,n\} \right), E \in \mathscr{R}_\sigma$$

解 λ不是外测度，因为半可加性不成立。

事实上，令$E_i = \{ i \}$，则

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

$$N\left(X \cap \{1, 2, \cdots, n\}\right) = N\left(\{1,2,\cdots,n\}\right) = n$$

可知 $\lambda X = \overline{\lim} \frac{1}{n} n = 1$，但 $\lambda E_i = 0 \ (i = 1,2,\cdots)$，

$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda E_i = 0$，于是有

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) > \sum_{i=1}^{\infty} \lambda E_i$$

(iii) 设μ^*是$\mathscr{R}_\sigma$上的外测度，E_0是$\mathscr{R}_\sigma$上一个确定的集，令$\lambda E = \mu^*(E \cap E_0)$（$\lambda$称为$\mu^*$关于$E_0$的吸收），$E \in \mathscr{R}_\sigma$.

解 λ是外测度。验证如下：

(1) $\lambda E \geqslant 0$，$\lambda \phi = 0$ 为显然。

(2) $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu^*\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cap E_0 \right]$

$$=\mu^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap E_0)\right]$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n\cap E_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n$$

(3) 设$E_1\subset E_2$，则$E_1\cap E_0\subset E_2\cap E_0$，于是

$$\lambda E_1=\mu^*(E_1\cap E_0)\leqslant\mu^*(E_2\cap E_0)=\lambda E_2$$

注意，(2)和(3)中的不等式成立是根据外测度μ^*的半可加性和单调性。

(iv) 设$\mu_1{}^*$，$\mu_2{}^*$是$\mathscr{R}_\sigma$上的两个外测度，令

$$\lambda E=a\mu_1{}^*E+b\mu_2{}^*E,\quad E\in\mathscr{R}_\sigma$$

这里a，b是实数。

解 ①当$a\geqslant0$，$b\geqslant0$时，λ为外测度，验证如下：

(1) $\lambda E\geqslant0$，$\lambda\phi=0$为显然。

(2) $$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=a\mu_1{}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)+b\mu_2{}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

$$\leqslant a\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1{}^*E_n+b\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2{}^*E_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a\mu_1{}^*E_n+b\mu_2{}^*E_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n$$

(3) 设$E_1\subset E_2$，则$\mu_1{}^*E_1\leqslant\mu_1{}^*E_2$，$\mu_2{}^*E_1\leqslant\mu_2{}^*E_2$，于是

$$\lambda E_1 = a\mu_1^* E_1 + b\mu_2^* E_1 \leqslant a\mu_1^* E_2 + b\mu_2^* E_2$$
$$= \lambda E_2$$

②当$a<0$，$b<0$时，在μ_1^*，μ_2^*中至少有一个不等于0时，λ肯定不是外测度，因$\lambda E \geqslant 0$不成立。

③当a，b中有一个为负数时，λ不一定成为外测度。

44. 设m表示R^1中外测度限制在波雷尔集类上的测度，a, b为实数，集E的T变换定义为$T(E) = \left\{x: ax+b, x\in E\right\}$试证，对每个波雷尔集$E$，有$mT(E) = |a| mE$。

证 根据测度对平移的不变性，只要证明变换$T(E) = \left\{ax: x\in E\right\}$对每个波雷尔集$E$有$mT(E) = |a| mE$。

对于$a=0$的特殊情形，结论显然正确。对$a\neq 0$，分下述四步证之。

(1) 先证：$T\left(\bigcup_k E_k\right) = \bigcup_k T(E_k)$

$$T\left(\bigcap_k E_k\right) = \bigcap_k T(E_k)$$

事实上

$$x \in T\left(\bigcup_k E_k\right) \Rightarrow \frac{x}{a} \in \bigcup_k E_k \Rightarrow \text{存在} k_0\text{，使}$$

$$\frac{x}{a} \in E_{k_0} \Rightarrow x \in T(E_{k_0}) \Rightarrow x \in \bigcup_k T(E_k)$$

反之

$$x \in \bigcup_k T(E_k) \Rightarrow \text{存在} k_0, \text{使} x \in T(E_{k_0})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} \in E_{k_0} \Rightarrow \frac{x}{a} \in \bigcup_k E_k$$

$$\Rightarrow x \in T\left(\bigcup_k E_k\right)$$

故
$$T\left(\bigcup_k E_k\right) = \bigcup_k T(E_k)$$

同理可证另一等式。

(2) 次证：若G为开集，则$T(G)$也为开集，且$mT(G) = |a|mG$。

事实上，对开区间(α,β)，有

$$T(\alpha,\beta) = \begin{cases}(a\alpha, a\beta) & (\text{当 } a>0) \\ (a\beta, a\alpha) & (\text{当 } a<0)\end{cases}$$

显然，$T(\alpha,\beta)$仍为开区间，且$mT(\alpha,\beta) = |a|(\beta-\alpha)$。

设$G = \bigcup\limits_k (\alpha_k,\beta_k)$，则$T(G) = \bigcup\limits_k T(\alpha_k,\beta_k)$，$T(\alpha_k,\beta_k)$互不相交，于是

$$mT(G) = \sum_k mT(\alpha_k,\beta_k) = \sum_k |a|(\beta_k - \alpha_k)$$

$$= |a|\sum_k(\beta_k - \alpha_k) = |a|mG$$

(3) 再证：若F为闭集，则$T(F)$也为闭集。

事实上，因$F \cup \mathscr{C}F = R^1$，$F \cap \mathscr{C}F = \phi$，由(1)有

$$T(F) \cup T(\mathscr{C}F) = T(R^1) = R^1$$
$$T(F) \cap T(\mathscr{C}F) = T(\phi) = \phi$$

故
$$T(F) = R^1 - T(\mathscr{C}F)$$

由(2)知$T(\mathscr{C}F)$为开集，于是$T(F)$为闭集。

(4) 对波雷尔集E，据其定义，由(1)，(2)，(3)即得$T(E)$为波雷尔集。下证 $m^*T(E) = |a|m^*E$。

事实上，对任意的开集$G \supset E$，显然有

$$G \supset E \Leftrightarrow T(G) \supset T(E)$$

于是由(2)有

$$m^*T(E) = \inf_{T(G)\supset T(E)} mT(G) = \inf_{G\supset E} |a| mG$$

$$= |a| m^*E$$

再注意到波雷尔集的可测性，便得

$$mT(E) = m^*T(E) = |a| m^*E = |a| mE$$

45. 试证：若存在μ可测集$X \supset E$，而满足

$$\mu X < \infty\ ,\quad \mu X = \mu^*E + \mu^*(X - E)$$

则E为μ可测的。

证 仅对μ为勒贝格测度m给出证明。对于一般抽象测度μ，可先引进内测度μ_*，然后证明E为μ可测的充要条件是$\mu^*E = \mu_*E$，再证明本题结论。

(1) 先证：对任一集A，存在G_δ型集B，使$B \supset A$，且$mB = m^*A$。

事实上，由外测度的定义，对任何自然数n，存在开集$G_n \supset A$，且

$$mG_n < m^*A + \frac{1}{n}$$

令 $$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

则 $$A \subset B \subset G_n,\quad m^*A \leqslant mB < m^*A + \frac{1}{n}$$

令$n \to \infty$，得

$$mB = m^*A$$

(2) 次证：$mX = m_*E + m^*(X - E)$。

事实上，对任何闭集$F \subset E$，有$X - F \supset X - E$，于是

$$m^*(X-E)\leqslant m(X-F)=mX-mF$$

即 $$mF\leqslant mX-m^*(X-E)$$

取上确界得

$$m_*E\leqslant mX-m^*(X-E)$$

即 $$mX\geqslant m_*E+m^*(X-E)$$

另一方面，对集$X-E$，由(1)有G_δ型集B，使

$$B\supset X-E,\ mB=m^*(X-E)$$

因$E\supset X-B$，故

$$m_*E\geqslant m(X-B)\geqslant mX-mB$$
$$=mX-m^*(X-E)$$

即 $$mX\leqslant m_*E+m^*(X-E)$$

综上即得

$$mX=m_*E+m^*(X-E)$$

(3) 再证E可测。

事实上，由(2)和题设$mX=m^*E+m^*(X-E)$可得$m^*E=m_*E$，故E可测。

46. 设E为R^n中任一子集，α为给定正数，对于任何$\varepsilon>0$，令

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\inf\sum_k\delta(E_k)^\alpha$$

其中$\delta(E_k)$表示E_k的直径，且下确界对一切满足$E\subset\bigcup E_k$而$\delta(E_k)<\varepsilon(k=1,2,\cdots)$的集列$\{E_k\}$而取。再令

$$H_\alpha(E)=\lim_{\varepsilon\to0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\sup_{\varepsilon>0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)$$

试证H_α为基本集R^n上的外测度，并满足条件：

若$H_\alpha(E)<\infty$，则当$\beta>\alpha$时，$H_\beta(E)=0$（H_α称为豪斯道夫(F.Hausdorff)测度）。

证 先证H_α为外测度。

(1) $H_\alpha(E)\geqslant 0$，$H_\alpha(\phi)=0$为显然。

(2) 若$E_1\subset E_2$，则对任何$\varepsilon>0$，显然有

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E_1)\leqslant H_{\alpha,\varepsilon}(E_2)$$

令$\varepsilon\to 0$，使得

$$H_\alpha(E_1)\leqslant H_\alpha(E_2)$$

(3) 设$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，任给正数$\varepsilon$，对每个$E_n$，由下确界的意义，对任意的$\varDelta>0$，存在$E_{n,k}$，使$\bigcup\limits_k E_{n,k}\supset E_n$，$\delta(E_{n,k})\quad\varepsilon$，且

$$\sum_k\delta(E_{n,k})^\alpha<H_{\alpha,\varepsilon}(E_n)+\frac{\varDelta}{2^n}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

显然，

$$\bigcup_{n,k}E_{n,k}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_k E_{n,k}\supset E$$

于是

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\inf\sum_k\delta(E_k)^\alpha\leqslant\sum_{n,k}\delta(E_{n,k})^\alpha$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_k\delta(E_{n,k})^\alpha<\sum_{n=1}^{\infty}H_{2,\varepsilon}(E_n)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varDelta}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}H_{\alpha,\varepsilon}(E_n)+\varDelta$$

由$\varDelta$的任意性得

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}H_{\alpha,\varepsilon}(E_n)$$

令$\varepsilon\to0$，便得

$$H_{\alpha}(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}H_{\alpha}(E_n)$$

由(1)，(2)，(3)知H_α为外测度。

次证当$\beta>\alpha$，$H_\alpha(E)<\infty$时，$H_\beta(E)=0$。

对任何正数ε，当$\delta(E_k)<\varepsilon$，$\bigcup\limits_k E_k\supset E$时，有

$$\sum_k\delta(E_k)^\beta=\sum_k\delta(E_k)^\alpha\cdot\delta(E_k)^{\beta-\alpha}$$

$$\leqslant\varepsilon^{\beta-\alpha}\sum_k\delta(E_k)^\alpha$$

取下确界得

$$H_{\beta,\varepsilon}(E)\leqslant\varepsilon^{\beta-\alpha}H_{\beta,\varepsilon}(E)$$

因为$H_\alpha(E)<\infty$，$\beta-\alpha>0$，令$\varepsilon\to0$，便得$H_\beta(E)=0$。

47. 证明：用十进小数表示[0,1]中的数时，不含数码7的一切数所成之集E是完全集，并求mE。

答 $mE=0$。

48. 证明：

(1) 直线上一切可测集所成之集μ的势为$2^{\aleph}$。

(2) 直线上一切不可测集所成之集v的势是什么？

提示 (1) $\overline{\overline{\mu}}\geqslant2^{\aleph}$可由康脱集$P_0$的一切子集均可测推得。$\overline{\overline{\mu}}\leqslant2^{\aleph}$可由直线上一切点集所成之集族的势为$2^{\aleph}$推知。

（2） $\overline{v} = 2^{5\setminus 9}$。

49. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为[0,1]中 n 个可测集，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} mA_i > n-1$，则有 $m\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$。

提示 可先证 $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathscr{C} A_i\right) < 1$，再用对偶原理推得结论。

50. 若存在两列可测集$\{A_n\}$，$\{B_n\}$，使$A_n \subset E \subset B_n$ $(n=1,2,\cdots)$，且$m(B_n - A_n) \to 0$（$n \to \infty$），则E可测。

提示 可先证 $m^*\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n - E\right) = 0$。

51. 设A，B是互不相交的可测集，则对任一集E，有

（1） $m^*\left(E \cap (A \cup B)\right) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B)$

（2） $m_*\left(E \cap (A \cup B)\right) = m_*(E \cap A) + m_*(E \cap B)$

提示 （1）可用外测度的定义证

$$m^*\left(E \cap (A \cup B)\right) \geqslant m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B)$$

相反的不等号可由外测度的半可加性得到。

（2）证法与(1)类似。

52. 设E与F有一为可测集，则

$$m^*E + m^*F = m^*(E \cup F) + m^*(E \cap F)$$

提示 用卡氏条件，分别取T为$E \cup F$和F。

53. 设E, F为互不相交的点集，则

$$m_*(E \cup F) \leqslant m_*E + m^*F \leqslant m^*(E \cup F)$$

提示 对$E\cup F$，有F_σ型集$B\subset E\cup F$，$mB=m_*(E\cup F)$。对F，有G_δ型集$A\supset F$，$mA=m^*F$。据此可证左边的不等式，用类似的方法可证右边。

54. 证明下列两个条件均为E可测的充要条件：

(1) 对任意的$\varepsilon>0$，存在开集$G\supset E$，使$m^*(G-E)<\varepsilon$。

(2) 对任意的$\varepsilon>0$，存在闭集$F\subset E$，使$m^*(E-F)<\varepsilon$。

提示 (1)必要性由测度定义推得，充分性可由上题推得。

(2) 用取补集的方法由(1)推得。

55. 设E为可测集，则对任意集T，有

$$m_*(E\cap T)+m^*(E\cap \mathscr{C}T)=mE$$

提示 用题53的结论即得。

56. 设$m^*E=q>0$，则对任何实数$C\in(0,q)$，存在$E_0E\cap$，使$m^*E_0=C$。

提示 令$E_x=E\cap(-\infty,x]$，$f(x)=m^*(x)E_x$，先证f连续，再用介值定理。

57. 设$\{A_n\}$为可测集列，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}mA_n<\infty$，则

$$m\left(\overline{\lim_n}A_n\right)=0$$

提示 对任意的$\varepsilon>0$，由题设，有自然数N，使$\sum\limits_{n=N}^{\infty}mA_n<\varepsilon$，再由$\overline{\lim\limits_n}A_n\subset\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}A_n$，可推得结论。

第二章　可测函数和勒贝格积分

一、基本概念和主要定理

可测函数　设$f(x)$是定义在可测集E上的实函数。如果对每一实数a，集$E(f>a)$恒可测（勒贝格可测），则称$f(x)$是E上（勒贝格）可测函数。其中条件"$E(f>a)$恒可测"可换成如下三个条件中的任何一个："$E(f\geqslant a)$恒可测"；"$E(f<a)$恒可测"；"$E(f\leqslant a)$恒可测"。

简单函数　设E是一可测集，$f(x)$在E上只取有限多个值$C_1,C_2,\cdots,C_n$，且$E(f=C_1)$，$E(f=C_2)$，$\cdots$，$E(f=C_n)$均可测。若设$e_K=E(f=C_K)$，

$$\chi_{e_K}(x)=\begin{cases}1 & \text{若}x\in e_K\\ 0 & \text{若}\overline{x\in e_K}\end{cases}$$

（$\chi_{e_K}(x)$称为集e_K的特征函数）则简单函数可写成如下形式：

$$f(x)=\sum_{K=1}^{n}C_K\chi_{e_K}(x)$$

连续函数　设$f(x)$为定义在集E上的有限函数。如果对任何$x_n\longrightarrow x(x_n\in E)$有$f(x_n)\longrightarrow f(x)$，则称$f(x)$于一点$x\in E$连续。如果$f(x)$于$E$中每一点连续，则称$f(x)$在$E$上连续。这里，对于$E$的孤立点处，总约定$f(x)$是连续

的。

可测集E上的连续函数，必是可测函数。

"几乎处处"概念 如果命题S在集E上除了某个零测度子集外，处处成立，则说命题S在E上几乎处处成立。

如，E上定义的两个函数$f(x)$与$g(x)$称为在E上几乎处处相等，指

$$mE(f(x)\neq g(x))=0$$

此时又称$f(x)$与$g(x)$对等，记作$f(x)\sim g(x)$。

近一致收敛 设f，f_n是可测集E上几乎处处有限的可测函数列，如果对任意的$\delta>0$，都存在E的可测子集E_δ使在E_δ上f_n一致收敛于f，而$m(E-E_\delta)<\delta$，则称序列f_n在E上近一致收敛于f.

测度收敛 设$f_n(x)$是可测集E上的可测函数列，$f(x)$是E上可测函数。如果对每个$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=0$$

则称f_n为测度收敛于f.

定理1 设$f_1(x)$，$f_2(x)$，…是可测集E上可测函数列，则当$\lim f_n(x)$几乎处处存在时，它是E上的可测函数。

定理2 设$f(x)$是可测集E上非负可测函数，则存在一列非负递增的简单函数$\varphi_n(x)$：

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots$$

使等式$\lim\varphi_n(x)=f(x)$在E上处处成立。

定理3 在可测集E上定义的两个可测函数的和、差、积、商（假定运算几乎处处有意义）都是可测的。

定理4（叶果洛夫定理） 设E是可测集，$mE<+\infty$，

$f_n(x)$（$n=1,2,3,\cdots$）与$f(x)$是在E上几乎处处有限的可测函数，且$\{f_n(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$。则$f_n(x)$在E上近一致收敛于$f(x)$.

定理 5（黎斯定理） 设$f_n(x)$在E上测度收敛于$f(x)$，而$mE<+\infty$，则存在$\{f_n(x)\}$的子序列$\{f_{n_K}(x)\}$，几乎处处收敛于$f(x)$.

定理 6（鲁津定理） 设$f(x)$是有界可测集E上的可测函数，则对任意的$\varepsilon>0$，存在闭集$F\subset E$，$m(E-F)<\varepsilon$，而$f(x)$限制在F上是连续的。

简单函数的勒贝格积分 设在E上定义的简单函数$\varphi(x)$有表示式

$$\varphi(x)=\sum_{K=1}^{n} y_K X e_K(x)$$

其中各$e_K=E(\varphi=y_K)$为互不相交的可测集，各y_K互异，而$Xe_K(x)$表示e_K上的特征函数。我们称和数$\sum_{K=1}^{n} y_K m e_K$为简单函数$\varphi(x)$在E上的勒贝格积分，并记为

$$\int_E \varphi(x)dm=\sum_{k=1}^{n} y_K m e_K$$

一般可测函数的勒贝格积分 设$f(x)$是有界可测集E上的可测函数。对于$f(x)\geqslant 0$的情形，取$\varphi(x)$为任一满足$0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$（$x\in E$）的简单函数，让$\varphi$变动，定义$f(x)$在$E$上的积分为

$$\int_E f(x)dm = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E \varphi(x)dm$$

若此量为有限数，则称$f(x)$在E上勒贝格可积。对于一般可测函数$f(x)$，当$\int_E f_+(x)dm$与$\int_E f_-(x)dm$不同时为$+\infty$时，称$f(x)$的积分存在，定义$f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x)dm = \int_E f_+(x)dm - \int_E f_-(x)dm$$

当此量为有限数时，称$f(x)$在E上勒贝格可积.

无界集上的勒贝格积分　设$f(x)$是R^n上的可测函数。$\{\Delta_k\}$是R^n中任一渐张的区间列$\Delta_1\subset\Delta_2\subset\cdots$，$\bigcup_k \Delta_k = R^n$，若极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k}|f(x)|dm$$

存在且有限，则称$f(x)$在R^n上可积，积分记为

$$\int_{R^n} f(x)\,dm = \lim\int_{\Delta_k} f(x)dm$$

如果$f(x)$仅在R^n的无界子集E上有定义，则定义

$$\int_E f(x)dm = \int_{R^n} f(x)X_E(x)dm$$

其中X_E为集E的特征函数。

囿变函数　设$f(x)$是区间$[a,b]$上的有限函数，考察区间$[a,b]$的任一组分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

当分点变动时，称上确界

$$\sup_{(x_0, x_1, \cdots, x_n)} \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$$

为$f(x)$在$[a, b]$上的总变分，并记为$\bigvee_a^b (f)$。若$\bigvee_a^b (f) < +\infty$，称$f(x)$为$[a,b]$上的囿变函数。

绝对连续函数 设$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots$表示$[a,b]$中任意有限个互不相交的区间所成的区间系，如果当

$m\left(\bigcup_k (a_k,b_k)\right) \longrightarrow 0$时，有

$$\sum_k \left| f(b_k) - f(a_k) \right| \longrightarrow 0$$

则称$f(x)$为$[a, b]$上的绝对连续函数。

奇异函数 设$\gamma(x)$为连续囿变函数，不等于常数，且$\gamma'(x) \sim 0$，则称$\gamma(x)$为奇异函数。

定理 7（积分的绝对连续性） 设$f(x)$在E上可积，则对任一正数ε，有正数δ，使当$me < \delta$（$e \subset E$）时，就有

$$\left| \int_e f(x)dm \right| \quad \varepsilon$$

定理 8（积分的完全可加性） 设$f(x)$在可测集E上的积分存在，$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，$E_k$等都是可测的且两两不相交，则

$$\int_E f(x)dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dm$$

定理 9（积分的线性） 设$f(x)$，$g(x)$在E上可积，a、b为常数，则

$$\int_E [af(x)+bg(x)]dm = a\int_E f(x)dm + b\int_E g(x)dm$$

定理10（唯一性定理） $\int_E |f(x)|dm = 0$ 的充要条件是$f(x)\sim 0$。

定理11 设$f(x)$是$[a,b]$上的可积函数，则对任何正数ε，必有区间$[a,b]$上的连续函数$g(x)$，使

$$\int_{[a,b]} |f(x)-g(x)|dm < \varepsilon$$

定理12（勒维定理） 设可测函数列满足下面的性质：

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots,\quad \lim f_n(x) = f(x)$$

则$f_n(x)$的积分列收敛于$f(x)$的积分：

$$\int_E f(x)\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm$$

定理13（法杜引理） 设$f_n(x)$是非负可测函数列，则

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dm \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dm$$

定理14（勒贝格控制收敛定理） 设

(1) $\{f_n(x)\}$是可测集E上的可测函数列；

(2) $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ a.e于E, $n=1,2,\cdots$，且$F(x)$在E上可积分（称$\{f_n(x)\}$为$F(x)$所控制，而$F(x)$叫控制函数）；

(3) $f_n(x)$测度收敛于$F(x)$

则$f(x)$在E上可积且有

$$\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm$$

定理15 区间$[a,b]$上的有界函数$f(x)$为R可积的充要条件是$f(x)$的不连续点集为零测度集。又，当$f(x)$在$[a,b]$

上R可积时，必定也L可积且两积分值相等。

定理16 $f(x)$是区间$[a,\ b]$上的囿变函数的充要条件是它可以表示成两个单调增函数的差。

定理17 $f(x)$为$[a,\ b]$上的绝对连续函数的充要条件是存在可积函数$g(x)$，使

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(x)dm$$

定理18 定义于区间$[a,b]$上的囿变函数$f(x)$可以分解为

$$f(x)=\varphi(x)+r(x)+S(x)$$

其中$\varphi(x)$为绝对连续函数，$r(x)$为奇异函数或零，而$S(x)$为$f(x)$的跳跃函数。

二、例题、习题与解法

1．证明$f(x)$是E上可测函数的充要条件是：对任一有理数r，集$E(f>r)$恒可测。如果集$E(f=r)$恒可测，问$f(x)$是否可测？

证 必要性。

根据可测函数的定义，必要性显然成立。

充分性。

任取实数a，设有理数列$\{r_n\}$满足$r_1<r_2<r_3<\cdots<r_n<r_{n+1}<\cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=a$。则

$$E(f\geqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f\quad r_n)$$

因为每一个$E(f>r_n)$都可测，所以$\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f>r_n)$可测，从而$E(f\geqslant a)$可测，故$f(x)$是$E$上的可测函数。

若仅有$E(f=r)$恒可测（r是有理数），则$f(x)$在E上不一定可测。

例如，设$E=[0,1]$，M为E中任一不可测子集，定义

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & 当X\in M\\ -\sqrt{2}, & 当X\in E-M\end{cases}$$

则对任何有理数r，$E(f=r)$为空集恒可测。但$f(x)$在E上不可测，因为$E(f>0)=M$是不可测集。

2. 设$f(x)$是E上可测函数，G为开集，F为闭集。试问$E(f\in G)$，$E(f\in F)$是否可测？这里记号$E(f\in A)=E(x: f(x)\in A)$。

解 (1) 设$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$，其中每个$(\alpha_n,\beta_n)$为$G$的构成区间。

$$E(f\in G)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>\alpha_n)\cap E(f<\beta_n)]$$

因为$f(x)$在E上可测，对一切n，$E(f>\alpha_n)\cap E(f<\beta_n)$必为可测集，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>\alpha_n)\cap E(f<\beta_n)]$是可测集，即$E(f\in G)$可测。

(2) 令$G_0=\mathscr{C}F$，则由F是闭集知G_0是开集，从而$E(f\in G_0)$是可测集。

而 $E(f\in F)=E-E(f\in G_0)$

故$E(f\in F)$是可测集。

3. 设$f(x)$，$g(x)$为E上可测函数，试证$E(f>g)$是可测集。

证 设$\{r_n\}$是全体有理数所成的序列，则

$$E(f>g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$$

事实上，若有$x_0\in E(f>g)$，则$f(x_0)>g(x_0)$，必存在有理数r_k，使$f(x_0)>r_k>g(x_0)$，于是

$$x_0\in E(f>r_k)\cap E(g<r_k)$$

从而

$$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$$

所以有

$$E(f>g)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$$

反之，若有

$$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$$

则存在n_0，使$x_0\in E(f>r_{n_0})\cap E(g<r_{n_0})$，于是

$$f(x_0)>r_{n_0}>g(x_0),\ f(x_0)>g(x_0)$$

从而$x_0\in E(f>g)$。所以

$$E(f>g)\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$$

故

$$E(f>g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$$

又，f,g皆E上可测函数，对于一切n，$E(f>r_n)$与

$E(g<r_n)$皆为可测集，因此$\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$是可测集，故$E(f>g)$是可测集。

4. (i) 证明 $S-\overline{\lim}A_n=\underline{\lim}(S-A_n)$

(ii) 设A_n是下述点集：n为奇数时，$A_n=(0,1-\frac{1}{n})$；n为偶数时，$A_n=(\frac{1}{n},1)$。证明$\{A_n\}$有极限，并求之。

证 (i) $S-\overline{\lim}A_n$

$$=S-\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=S\cap\mathscr{C}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)$$

$$=S\cap\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{C}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\right]=S\cap\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\mathscr{C}A_n\right]$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[S\cap\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\mathscr{C}A_n\right)\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(S\cap\mathscr{C}A_n)$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(S-A_n)$$

$$=\underline{\lim}(S-A_n)$$

(ii) 因为$\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=(0,1)$对任何自然数$k$成立，

所以

$$\overline{\lim}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=(0,1)$$

另一方面，当k为奇数($k>1$)时，

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \left(\frac{1}{k+1}, 1-\frac{1}{k}\right), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$$

当K为偶数时，

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \left(\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k+1}\right)$$

所以

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = (0, 1)$$

即
$$\underline{\lim} A_n = (0, 1)$$

因为 $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = (0,1)$，所以$\{A_n\}$有极限且 $\lim A_n = (0,1)$。

5. 用$X_E(x)$表示集E的特征函数，试证对于任一集列$\{E_n\}$，有

$$X_{\overline{\lim} E_n}(x) = \overline{\lim} X_{E_n}(x)$$
$$X_{\underline{\lim} E_n}(x) = \underline{\lim} X_{E_n}(x)$$

从而集列E_n的极限存在等价于函数列$X_{E_n}(x)$的极限存在。

证 $X_{\overline{\lim} E_n}(x) = 1$

$\Leftrightarrow x \in \overline{\lim} E_n$

$\Leftrightarrow \{E_n\}$中有无限多个含有x

$\Leftrightarrow \{X_{E_n}(x)\}$中，有无限多个取值为1

$\Leftrightarrow \overline{\lim} X_{E_n}(x) = 1$

所以使函数$X_{\overline{\lim} E_n}(x)$取值为1的点与使函数

$\overline{\lim} X_{E_n}(x)$取值为1的点完全一致，而两函数$X_{\overline{\lim} E_n}(x)$与$\overline{\lim} X_{E_n}(x)$的值不取1便取0，因此使两函数取值为0的点也必定一致。

故

$$X_{\overline{\lim} E_n}(x) = \overline{\lim} X_{E_n}(x)$$

同理可证

$$X_{\underline{\lim} E_n}(x) = \underline{\lim}\, X_{E_n}(x)$$

于是，集列$\{E_n\}$的极限存在

$$\Leftrightarrow \underline{\lim}\, E_n = \overline{\lim}\, E_n$$

$$\Leftrightarrow X_{\underline{\lim} E_n}(x) = X_{\overline{\lim} E_n}(x)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lim} X_{E_n}(x) = \overline{\lim}\, X_{E_n}(x)$$

$\Leftrightarrow$函数列$\{X_{E_n}(x)\}$的极限存在

所以集列$\{E_n\}$的极限存在等价于函数列$\{X_{E_n}(x)\}$的极限存在。

6. 设$f(x)$，$f_n(x)$（$n=1,2,3,\cdots$）是定义在集$E=[a,b]$上的实函数，r为自然数，用记号$E(|f_n-f|<\frac{1}{r})$表示E中满足$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{r}$的点所成之集，试证$\bigcap_{r=1}^{\infty}\underline{\lim}\, E(|f_n-f|<\frac{1}{r})$是$E$中使$f_n(x)$收敛于$f(x)$的点集。

证 设E中使$f(x)$收敛于$f(x)$的点集为A，则E中使$f_n(x)$不收敛于$f(x)$的点集$B=E-A$。

由参文考献[1]74页例1知

$$B=\bigcup_{r=1}^{\infty}\overline{\lim}E(|f_n-f|\geq\frac{1}{r})$$

因此，把E看成基本集合时，有$A=\mathscr{C}B$。所以

$$A=\mathscr{C}B=\mathscr{C}\left[\bigcup_{r=1}^{\infty}\overline{\lim}E(|f_n-f|\geq\frac{1}{r})\right]$$

$$=\mathscr{C}\left[\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E(|f_n-f|\geq\frac{1}{r})\right]$$

$$=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left[\mathscr{C}E(|f_n-f|\geq\frac{1}{r})\right]$$

$$=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E(|f_n-f|<\frac{1}{r})$$

$$=\bigcap_{r=1}^{\infty}\underline{\lim}E(|f_n-f|<\frac{1}{r})$$

故集$\bigcap_{r=1}^{\infty}\underline{\lim}E(|f_n-f|<\frac{1}{r})$是$E$中使$f_n(x)$收敛于$f(x)$的点所成之集。

7. 设E是$[0,1]$中的一个不可测集，令

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in E\\ -x & x\overline{\in}E\end{cases}$$

问$f(x)$在$[0,1]$上是否可测？$|f(x)|$是否可测？

解 设$I=[0,1]$，则$I(f(x)>0)=E-\{0\}$。因为E

不可测。所以$E-\{0\}$也不可测，故$f(x)$在$[0,1]$上不可测。

而$|f(x)|=x$，$x\in[0,1]$，是$[0,1]$上的连续函数，所以$|f(x)|$必在$[0,1]$上可测。

8．设$\{f_n\}$是E上可测函数列。试证它的收敛点集与发散点集都是可测的。

证 设$\{f_n\}$的收敛点集为A，发散点集为B，则

$$A=E(\overline{\lim}f_n=\underline{\lim}f_n)$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left(\left|\overline{\lim}f_n-\underline{\lim}f_n\right|<\frac{1}{k}\right)$$

因为$\{f_n\}$是E上可测函数列，所以$\overline{\lim}f_n$与$\underline{\lim}f_n$皆E上可测函数，从而$\left|\overline{\lim}f_n-\underline{\lim}f_n\right|$也是$E$上可测函数。于是对任何自然数$k$，$E\left(\left|\overline{\lim}f_n-\underline{\lim}f_n\right|<\frac{1}{k}\right)$是可测集，故$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left(\left|\overline{\lim}f_n-\underline{\lim}f_n\right|<\frac{1}{k}\right)$是可测集。

而$B=E-A$，所以$\{f_n\}$的发散点集也必定是可测集。

9．试作$E=[0,1]$上的可测函数$f(x)$，使对任何连续函数$g(x)$有$mE(f\neq g)\neq 0$。此结果与鲁津定理有无矛盾？

解 令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\in(0,1]\\ +\infty & x=0\end{cases}$$

显然，$f(x)$在$E=[0,1]$上可测。设$g(x)$是$E=[0,1]$上的任一连续函数，则$g(x)$必在E上有界。故存在$M>1$，使当$x\in E$时，恒有$|g(x)|\leqslant M$。

在$[0,\frac{1}{M})$上，因为$f(x)>M$，所以在$[0,\frac{1}{M})$上$f(x)\neq g(x)$。故$E(f\neq g)\supset[0,\frac{1}{M})$，于是$mE(f\neq g]\geqslant\frac{1}{M}>0$。即对任何连续函数$g(x)$都有$mE(f\neq g)\neq 0$。

此结果与鲁津定理并无矛盾。

事实上，对任给的$\varepsilon>0$（不妨设$\varepsilon<\frac{1}{2}$），存在闭集$F=[\frac{\varepsilon}{2},1]\subset E$，$m(E-F)=m[0,\frac{\varepsilon}{2}]=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。而所作的函数$f(x)$在$F$上显然连续。

10. 设$f(x)$是$-\infty<x<+\infty$上的连续函数，$g(x)$是$a\leqslant x\leqslant b$上的可测函数，则$f(g(x))$是可测函数。

证 记$E=[a,b]$，$R^1=(-\infty,+\infty)$。

因为$f(x)$在R^1上连续，所以对任意实数C有$R^1(f>C)=G_0$是开集。

由于$E(f(g(x))>c)=E(g(x)\in G_0)$，而$g(x)$是$E$上的可测函数，所以$E(g(x)\in G_0)$是可测集，从而$E(f(g(x))>c)$可测，故$f(g(x))$是集$E$上的可测函数。

11. 设$f_n(x)$是E上几乎处处有限的可测函数列，而$f_n(x)$几乎处处收敛，则存在常数C与正测度集合$E_0\subset E$，使在E_0上，对一切n，有$|f_n(x)|\leqslant C$。

证 由题意知，显然应该有$mE>0$，且可假设E有界（否则任取E的有界可测子集A，使$0<mA<+\infty$，而用A去代替E）。

证法一：

设E中使f_n不收敛的点所成之集为Q，则$mQ=0$，E中使$|f_n|=+\infty$的点所成之集为E_n，则$mE_n=0$，($n=1$，2，3，…)，于是$m\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=0$。

令$B=E-\left[Q\cup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right]$，则$mB=mE>0$，任取$x_0\in B$，则$f_n(x_0)$对一切$n$都是有限数。因为$\{f_n(x_0)\}$是收敛数列，所以$\sup\limits_n|f_n(x_0)|$也必定是有限数。

于是

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B\left(\sup_n|f_n|\leqslant k\right)$$

因为

$$B\left(\sup_n|f_n|\leqslant k\right)\subset B\left(\sup_n|f_n|\leqslant k+1\right)$$

所以

$$mB=\lim_{k\to\infty}mB\left(\sup_n|f_n|\leqslant k\right)$$

故存在自然数K_0，使

$$mB\left(\sup_n|f_n|\leqslant k_0\right)>\frac{1}{2}mB$$

令$E_0=B\left(\sup\limits_n|f_n|\leqslant k_0\right)$，$C=k_0$，则$mE_0>0$且对任何$x\in E_0$及一切$n$，都有$|f_n(x)|\leqslant C$。

证法二：

因为f_n在E上几乎处处收敛，设其极限函数为$f(x)$，则

根据叶果洛夫定理，对$\delta=\frac{mE}{4}$，存在集$E_\delta\subset E$，使$m(E-E_\delta)$ $<\delta=\frac{mE}{4}$，而在E_δ上，f_n一致收敛到$f(x)$。此时必有mE_δ $>\frac{3}{4}mE$，且$f(x)$在E_δ上可测。

再由鲁津定理，对$\varepsilon=\frac{mE}{4}$，存在闭集$F\subset E_\delta$，$m(E_\delta-F)<\frac{mE}{4}$，即$mF>\frac{mE}{2}$，使$f(x)$在$F$上连续。因为$f(x)$在有界闭集$F$上连续，必有界。所以存在$M>0$，当$x\in F$时恒有$|f(x)|<M$。

因为f_n在F上一致收敛到$f(x)$，所以存在N，当$n>N$时，在F上恒有$|f_n-f|<1$，从而$|f_n|<M+1$，即$n>N$时，在F上$|f_n|<M+1$一致地成立。

下面再来处理$f_1,f_2,f_3,\cdots,f_N$。

因为$f_i(i=1,2,\cdots,N)$几乎处处有限，所以

$$mE(|f_i|=+\infty)=0\qquad i=1,2,\cdots,N$$

又$E(|f_i|>r)\supset E(|f_i|>r+1)$对$i=1,2,\cdots,N$及一切自然数$r$成立，而

$$E(|f_i|=+\infty)=\bigcap_{r=1}^{\infty}E(|f_i|>r)$$

所以对每一个固定的i，有

$$\lim_{r\to\infty}E(|f_i|>r)=\bigcap_{r=1}^{\infty}E(|f_i|>r)$$

于是

$$\lim_{r\to\infty}mE(|f_i|>r)=0$$

故对每一个固定的i，存在相应的r_i，使

$$mE(|f_i|>r_i)<\frac{mF}{N}$$

取$r_0=\max(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_N)$，则$mE(|f_i|>r_0)<\dfrac{mF}{N}$对任何$i$成立($i=1,2,3,\cdots,N$)，故

$$m\bigcup_{i=1}^{N}E(|f_i|>r_0)\leqslant\sum_{i=1}^{N}mE(|f_i|>r_0)<mF$$

令$E_0=F-\bigcup\limits_{i=1}^{N}E(|f_i|>r_0)$，$C=\max(M+1,r_0)$，则$mE_0$ 0，且在E_0上恒有$|f_n(x)|\leqslant C$对一切n成立。

12. 设函数列$f_n(x)$在E上测度收敛于$f(x)$，且$f_n(x)\leqslant g(x)$在E上几乎处处成立，$n=1,2,3,\cdots$。试证$f(x)\leqslant g(x)$在E上几乎处处成立。

证 因为函数列$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$，所以存在子函数列f_{n_k}几乎处处收敛到$f(x)$。令

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>g)\cup E(f_{n_k}\nrightarrow f)$$

则$mA=0$。而在$E_0=E-A$上，恒有$f_{n_k}\leqslant g$且f_{n_k}收敛于f。所以$f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)\leqslant g(x)$在$E_0$上处处成立，故$f(x)\leqslant g(x)$在$E$上几乎处处成立。

13. 设函数列$f_n(x)$在有界集E上近一致收敛于$f(x)$，试证$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$。

证 因为$f_n(x)$在E上近一致收敛于$f(x)$，所以对任何自然数r，存在可测集$E_r\subset E$，mE_r $\dfrac{1}{r}$，在$E-E_r$上$f_n(x)$

一致收敛于$f(x)$。

令$E_0=\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}E_r$，则$E_0\subset E_r$对一切$r$成立，所以$mE_0\leqslant mE_r<\frac{1}{r}$对一切自然数$r$成立，故$mE_0=0$。

又 $$E-E_0=E\cap\mathscr{C}E_0=E\cap\left(\mathscr{C}\bigcap_{r=1}^{\infty}E_r\right)$$

$$=E\cap\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\mathscr{C}E_r\right)=\bigcup_{r=1}^{\infty}(E\cap\mathscr{C}E_r)$$

$$=\bigcup_{r=1}^{\infty}(E-E_r)$$

所以任取$x_0\in E-E_0$，必存在r_0使$x_0\in E-E_{r_0}$，从而$f_n(x_0)\longrightarrow f(x_0)$。故$f_n(x)$在$E-E_0$上处处收敛于$f(x)$。而$mE_0=0$，所以$f_n(x)$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$。

14. 设$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$，而$f_n(x)\sim g_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$，则有$g_n(x)$测度收敛于$f(x)$。

证 为叙述方便，设在可测集E上讨论问题。

令$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n\neq g_n)$，则$mA=0$，任给$\sigma>0$，因为

$$E(|g_n-f|\geqslant\sigma)\subset E(|f_n-f|\geqslant\sigma)\cup A$$

所以

$$mE(|g_n-f|\geqslant\sigma)\leqslant mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)$$

对任何n成立。

由于$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} mE(|g_n - f| \geqslant \sigma) = 0$$

故在E上也有$g_n(x)$测度收敛于$f(x)$。

15. 设$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$，且$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$几乎处处成立，$n=1,2,3,\cdots$。则几乎处处有$f_n(x)$收敛于$f(x)$。

证 为叙述方便，设在可测集E上讨论问题。

因为$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$，所以存在子函数列$f_{n_k}(x)$在E上几乎处处收敛于$f(x)$。令

$$A = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > f_{n+1})\right] \cup E(f_{n_k} \nrightarrow f)$$

则$mA = 0$.

设$E_0 = E - A$，任取$x_0 \in E_0$，则$f_n(x_0) \leqslant f_{n+1}(x_0)$对任何$n$成立，且$f_{n_k}(x_0) \longrightarrow f(x_0)$。

因为$\{f_n(x_0)\}$是单调递增数列，所以

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

即在E_0上处处有$f_n(x)$收敛于$f(x)$，所以在E上几乎处处有$f_n(x)$收敛于$f(x)$。

16. 设$mE < \infty$，几乎处处有限的可测函数列$f_n(x)$，$g_n(x)$分别测度收敛于$f(x)$，$g(x)$。试证$f_n(x)\cdot g_n(x)$测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$。

提示 用公式$ab = \frac{1}{4}\left\{(a+b)^2 - (a-b)^2\right\}$

证 首先证明，若$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$，则$f_n^2(x)$必

测度收敛于$f^2(x)$。

用反证法　若f_n^2不依测度收敛于f^2，则存在$\sigma_0>0$，使

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n^2-f^2|\geqslant\sigma_0)\neq 0$$

于是必有子函数列$\left\{f_{n_k}\right\}$，满足

$$\lim_{k\to\infty} mE(|f_{n_k}^2-f^2|\geqslant\sigma_0)=l>0$$

另一方面，因f_n测度收敛于f，f_{n_k}也必测度收敛于f，于是存在子列f_{n_k}'几乎处处收敛到f。所以$f_{n_k}^{2\prime}$也几乎处处收敛到f^2，从而$f_{n_k}^{2\prime}$测度收敛到f^2，这与$\lim\limits_{k\to\infty} mE(|f_{n_k}^2-f^2|\geqslant\sigma_0)=l>0$相矛盾，所以$f_n^2$测度收敛于$f^2$。

其次再完成本题结论的证明。

因f_n测度收敛于f，g_n测度收敛于g，所以$f_n\pm g_n$测度收敛于$f\pm g$，从而$(f_n\pm g_n)^2$测度收敛于$(f\pm g)^2$。

于是

$$f_n\cdot g_n=\frac{1}{4}\left\{(f_n+g_n)^2-(f_n-g_n)^2\right\}$$

依测度敛收到

$$\frac{1}{4}\left\{(f+g)^2-(f-g)^2\right\}=f\cdot g$$

17. (1) $E_k(k=1,2,3\cdots)$皆可测集，$E=\bigcup\limits_k E_k$，试证，$f(x)$在E上可测的充要条件是：$f(x)$在每个$E_k(k=1,2,3,\cdots)$上可测。

(2)　若$E_\lambda(\lambda\in A)$皆可测集，A为不可列的指标集

$E=\bigcup\limits_{\lambda\in A}E_\lambda$. (1)中的结论是否仍旧成立？为什么？

提示：(2)结论不再成立。

例如，取$E_\lambda=\{\lambda\}$，$\lambda\in[0,1]=A$. B是A的任一不可测子集，且假定$0\overline{\in}B$. 则

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in B\\ -x & x\in A-B\end{cases}$$

在每个E_λ上可测，而在$E=\bigcup\limits_{\lambda\in A}E_\lambda$上不可测。

18. 设$f(x)$在E上可测，$\varphi(y)$是$f(E)$上的单调函数，则$\varphi(f(x))$在E上可测。

19. 设$f(x)$在E上可测，B是R^1上的波雷尔集。试证$f^{-1}(B)$是可测集。

若A是R^1上任意可测集，问$f^{-1}(A)$是否必定可测？

提示 (1) 当G是开区间、开集、闭集时，分别证明$f^{-1}(G)$可测，再证$f^{-1}(B)$可测。

(2) 当A是R^1上任意可测集时，$f^{-1}(A)$不一定可测。

例 设P_0是康托完备集，称其长为$\frac{1}{3^K}$的余区间为第K级余区间。第K级余区间从左往右数的第i个记作δ_i^K。

定义

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+\dfrac{2i-1}{2^K} & \text{当 } x\in\delta_i^K\text{时，}\quad K=1,2,3,\cdots,\ i=1,2,3,\cdots,2^{K-1}\\ x+\sup\limits_{\xi<x,\xi\in[0,1]-P_0}\{\varphi(\xi)\} & \text{当}x\in P_0\text{时}\end{cases}$$

可以证明，$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续且严格单调递增。

设$\varphi(P_0)=F$，则$mF=1$。以A_0表示F的任一不可测子集，f表示φ的反函数，显然f是[0，2]上的可测函数且$A=f(A_0)\subset P_0$，故A可测，但$f^{-1}(A)=A_0$却不可测。

20. 设E是R^1上有界可测集，$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数，则对任意$\varepsilon>0$，有闭集$F\subset E$及$g(x)\in C_{R^1}$，使

(1) 当$x\in F$时，$f(x)=g(x)$；

(2) $m(E-F)<\varepsilon$。

提示 由鲁津定理得所需的闭集F，并设含F的最小闭区间为$[c,d]$，$[c,d]-F=\bigcup\limits_i(c_i,d_i)$，于是

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x\leqslant a\text{或}x\geqslant b\text{时}\\ f(x) & \text{当}x\in F\text{时}\\ f(c)\cdot\dfrac{x-a}{c-a} & \text{当}x\in(a,c)\text{时}\\ f(d)\cdot\dfrac{b-x}{b-d} & \text{当}x\in(d,b)\text{时}\\ f(c_i)+\dfrac{f(d_i)-f(c_i)}{d_i-c_i}(x-c_i) & \text{当}x\in(c_i,d_i)\text{时}\end{cases}$$

即为所求。

21. E是R^1上有界可测集，$f(x)$在E上几乎处处有限，则$f(x)$在E上可测的充要条件是：有R^1上的连续函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$在$E$上几乎处处成立。

22. 鲁津定理中，将连续函数改为多项式，成立不成立？为什么？

提示 不成立。

不妨设$E=[0,1]$，$f(x)=\sin x$，若对ε 0，有闭集$F\subset[0,1]$，$mF>1-\varepsilon$，使得在F上

$$f(x)=\sin x=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

则在F上$\sin x-(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0)$的任何阶导数都将为0，表明$\sin x$或$\cos x$将在$[0,1]$上有无限多个0点，这显然是不可能的。

23. 设$f(x)$是区间$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数，则对于任意的$\varepsilon>0$及$\delta>0$，恒有闭集$F\subset[a,b]$及多项式$P(x)$，使$mF>b-a-\delta$，而在F上$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$。

24. 鲁津定理中，如果取$\varepsilon=0$结论还对不对？为什么？

提示 结论未必成立。

例如，取$E=[0,1]$，无处稠密集A满足$mA>0$且$A\subset E$，作函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in E-A\end{cases}$$

则不管E_0是E中什么样的零测度集，$f(x)$在$E-E_0$上都不可能连续。

31. $mE<+\infty$，f及f_n（$n=1,2,3,\cdots$）是E上几乎处处有限的可测函数。试证，f_n在E上依测度收敛于f的充要条件是：$\{f_n\}$的任一子序列$\{f_{n_k}\}$中，存在子序列$\{f_{n_{k'}}\}$使$\lim\limits_{k'\to\infty}f_{n_{k'}}=f$在$E$上几乎处处成立。

提示 充分性的证明可采用反证法。

32. 设$f(x)$，$g(x)$都是E上可测函数，$g(x)\in L$，且几乎处处成立$f(x)\leqslant g(x)$，问$f(x)$是否可积？

解 $f(x)$未必可积，例如：

设

$$E=[0,1],\quad g(x)=0$$

$$f(x)=\begin{cases}-2 & x\in(\frac{1}{2},1]\\ -4 & x\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\\ \vdots & \vdots\\ -2^n & x\in(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]\\ \vdots & \vdots\\ 0 & x=0\end{cases}$$

显然$g(x)\in L$，$f(x)\leqslant g(x)$。但

$$\int_{[0,1]}f(x)dm=\sum_{k=1}^{\infty}(-2^k)\frac{1}{2^k}=-\infty$$

［注］ 若还存在$\mathscr{S}(x)\in L$，使$\mathscr{S}(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则$f(x)\in L$。

33. 设$f(x)$于E上可积，令$E_n=E(|f|\geqslant n)$，则

$$\lim_{n\to\infty}mE_n=0$$

证法一 因为$f(x)$在E上可积，所以

$$\int_E|f(x)|\,dm=S<\infty$$

但
$$S\geqslant\int_{E_n}|f(x)|\,dm\geqslant\int_{E_n}n\,dm=n\cdot mE$$

所以
$$mE_n\leqslant\frac{1}{n}S$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}mE_n=0$$

证法二 根据可积函数必几乎处处有限，得

$$mE(|f|=+\infty)=0$$

但$E(|f|=+\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，且$\{E_n\}$为一渐缩可测集列，由参考文献［1］第二章定理3.6得

$$\lim_{n\to\infty}mE_n=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=mE(|f|=\infty)=0$$

34. 设在康托闭集P_0上定义函数$f(x)$为零，而在P_0的补集中长为$\frac{1}{3^n}$的构成区间上定义$f(x)$为$n(n=1,2,3,\cdots)$，试证$f\in L$，并求积分值。

证 令e_n为G_0中长为$\frac{1}{3^n}$的各开区间之并$(n=1,2,3,\cdots)$，则

$$G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n \qquad mE_n=\frac{2^{n-1}}{3^n}$$

令

$$f_n(x)=\begin{cases} i & x\in e_i(i=1,2,\cdots,n) \\ 0 & x\in[0,1]-\bigcup_{i=1}^{n}e_i \end{cases}$$

则简单函数列$\{f_n(x)\}$满足

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad x\in[0,1]$$

由参考文献［1］第四章的基本引理的注得

$$\int_{[0,1]}f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)dm$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i\ \frac{2^{i-1}}{3^i}=\sum_{i=1}^{\infty} i\ \frac{2^{i-1}}{3^i}=3$$

这就证明了$f(x)\in L$，且其积分值为3。

35. 设$f(x)\geqslant 0$为可测函数，令

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases} f(x) & 若f(x)\leqslant n \\ 0 & 若f(x)>n \end{cases}$$

则当$f(x)$几乎处处有限时，有

$$\lim_n\int_E\{f(x)\}_n dm=\int_E f(x)dm$$

证 令$A=E(f=\infty)$，则$mA=0$。于是

$$\int_A f(x)dm=0\qquad \int_A\{f(x)\}_n dm=0$$

故有

$$\lim_n\int_A\{f(x)\}_n dm=\int_A f(x)dm$$

在$E-A$上，令

$$u_n(x)=\begin{cases} f(x) & n-1<f(x)\leqslant n \\ 0 & 其它 \end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

则

$$\{f(x)\}_n=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\qquad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$$

由参考文献[1]第四章定理3.1，得

$$\int_{E-A}f(x)dm=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E-A}u_k(x)dm$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{B-A}u_k(x)dm=\lim_{n}\int_{B-A}\{f(x)\}_n dm$$

因此

$$\lim_{n}\int_{B}\{f(x)\}_n dm$$

$$=\lim_{n}\int_{A}\{f(x)\}_n dm+\lim_{n}\int_{B-A}\{f(x)\}_n dm$$

$$=\int_{A}f(x)dm+\int_{B-A}f(x)dm=\int_{B}f(x)dm$$

36. 设由[0,1]中取出n个可测子集$E_1,E_2,\cdots E_n$。假定[0,1]中任一点至少属于这n个集中的q个，试证必有一集，它的测度大于或等于q/n。

证 令 $\mathscr{S}(x)=\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}(x)\qquad x\in[0,1]$

其中$\chi_{E_k}(x)$表示E_k的特征函数。由题设$\mathscr{S}(x)\geqslant q$，于是得

$$q=\int_{[0,1]}q\,dm\leqslant\int_{[0,1]}\mathscr{S}(x)dm$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{[0,1]}\chi_{E_k}(x)dm=\sum_{k=1}^{n}mE_k$$

因此，$E_1,E_2,\cdots$，E_n中必有一集，它的测度不小于q/n。

37. 勒维定理中去掉函数列的非负性假定，结论是否成立？

解 未必成立。例如在[0,1]上定义

$$f_n(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{nx} & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

$$f(x)=0$$

则有 $$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant f_3(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

$$\lim_n f_n(x)=f(x)$$

但

$$\int_{[0,1]}f_n(x)dm=-\infty \qquad n=1,2,\cdots$$

$$\int_{[0,1]}f(x)dm=0$$

显然$\lim\limits_n\int_{[0,1]}f_n(x)dm=\int_{[0,1]}f(x)dm$的结论不成立。

[注] 容易证明，若存在$g(x)\in L$满足$g(x)\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，则勒维定理的结论仍成立。

38. 设$mE>0$，又设E上可积函数$f(x)$，$g(x)$满足$f(x)\quad g(x)$，试证

$$\int_E f(x)dm<\int_E g(x)dm$$

证 因为$g(x)-f(x)>0$，所以

$$\int_E[g(x)-f(x)dm\geqslant 0$$

若

$$\int_E[g(x)-f(x)]dm=0$$

则

$$g(x)-f(x)\sim 0$$

与题设矛盾，故得

$$\int_E f(x)dm<\int_E g(x)dm$$

39. 设$f(x)$为E上可积函数，如果对任何有界可测函数$\varphi(x)$，都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)dm=0$$

则$f\sim 0$。

证 令

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\in E(f\geqslant 0)\\ -1 & x\in E(f<0)\end{cases}$$

因为

$$E(\varphi>a)=\begin{cases}\phi & a\geqslant 1\\ E(f\geqslant 0) & -1\leqslant a<1\\ E & a<-1\end{cases}$$

所以$\varphi(x)$为E上的有界可测函数。由题设，有

$$\int_E f(x)g(x)dm=\int_E |f(x)|\,dm=0$$

根据唯一性定理，得$f\sim 0$.

40. 设$f(x)$是$[0,1]$上的可积函数。若对任何$c(0<c<1)$恒有

$$\int_{(0,c)} f(x)dm=0$$

则$f\sim 0$。

证法一 由题设，显然有

$$\int_{(0,1)} f(x)dm=0$$

于是对任何开区间$(\alpha,\beta)\subset(0,1)$，有

$$\int_{(\alpha,\beta)} f(x)dm=\int_{(0,\beta)} f(x)dm-\int_{(0,\alpha)} f(x)dm=0$$

从而可知，对任何开集$G=\bigcup\limits_k(\alpha_k,\beta_k)$，有

$$\int_E f(x)dm=\sum_k\int_{(\alpha_k,\beta_k)} f(x)dm=0$$

对于(0,1)中的任意闭集F，$G=(0,1)-F$是(0,1)中的开集，有

$$\int_F f(x)dm=\int_{(0,1)}f(x)dm-\int_G f(x)dm=0$$

若在$E=(0,1)$上，$f\sim 0$不成立，令

$$E_1=E(f>0) \qquad E_2=E(f<0)$$

则mE_1，mE_2中至少有一个大于零。不妨设$mE_1>0$，由测度的定义，必存在闭集$F_0\subset E_1\subset(0,1)$，使$mF_0>0$，而在$F_0$上，$f(x)>0$，由本章第38题知

$$\int_{F_0} f(x)dm \quad 0$$

得出矛盾，因此$f\sim 0$。

证法二 根据积分的绝对连续性，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$e\subset E=(0,1)$，$me<\delta$时，

$$\left|\int_e f(x)dm\right|<\varepsilon$$

对于E中任意一个可测集S，必存在(0,1)中的开集$G\supset S$，使$m(G-S)<\delta$，于是

$$\left|\int_{G-S} f(x)dm\right|<\varepsilon$$

因此

$$\left|\int_S f(x)dm\right|=\left|\int_G f(x)dm-\int_{G-S} f(x)dm\right|$$

$$=\left|\int_{G-S} f(x)dm\right| \quad \varepsilon$$

由ε的任意性，知

$$\int_S f(x)dm=0$$

即在E中的任一可测集S上的积分都为0。特别地，对任一自

然数n,

$$\int_{E(f\geqslant 1/n)} f(x)dm=0$$

但

$$\int_{E(f\geqslant 1/n)} f(x)dm\geqslant \frac{1}{n}mE(f\geqslant \frac{1}{n})$$

所以

$$mE(f\geqslant \frac{1}{n})=0$$

由于$-f(x)$同$f(x)$一样符合题设条件，所以

$$mE(-f\geqslant \frac{1}{n})=0$$

即

$$mE(f\leqslant -\frac{1}{n})=0$$

故有

$$mE(|f|\geqslant \frac{1}{n})=0 \quad n=1,2,\cdots$$

因为

$$E(f\neq 0)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(|f|\geqslant \frac{1}{n})$$

所以

$$mE(f\neq 0)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant \frac{1}{n})=0$$

即$f\sim 0$。

41. 证明$\displaystyle\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}\ (p>-1)$

证 在(0, 1)上，$\displaystyle\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}=-\sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n}\ln x$,

由参考文献[1]第四章定理3.1，得

$$\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dm = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} x^{p+n} \ln x \, dm$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (R) \int_0^1 x^{p+n} \ln x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}$$

42. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} (R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx \, dx$

解 因为 $\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx$ 在[0,1]上连续，所以在[0,1]上R可积，又因为

$$\left| \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx \right| \leqslant \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} = \frac{nx}{1+n^2x^2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \in L[0,1]$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx = 0 \qquad x \in [0,1]$$

由勒贝格控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty} (R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx \, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} (L) \int_{[0,1]} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx \, dm$$

$$= \int_{[0,1]} 0\, dm = 0$$

43. 设$f_n(x)$是E上可积函数，$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$，且

$$\int_E |f_n(x)|dm < K \qquad K\text{为常数}$$

则$f(x)$可积。

证 设$E_0 = E(f_n \longrightarrow f)$，则

$$m(E-E_0)=0 \qquad \int_{E-E_0} |f(x)|dm = 0$$

在E_0上，$|f_n(x)| \longrightarrow |f(x)|$ $(n\to\infty)$，由法杜定理，得

$$\int_{E_0} |f(x)|dm \leqslant \varliminf_n \int_{E_0} |f_n(x)|dm \leqslant K$$

所以

$$\int_E |f(x)|dm = \int_{E_0} |f(x)|dm \leqslant K$$

即$f(x)$在E上可积。

44. 设$f(x)$，$f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$都是E上可积函数，$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$，且

$$\int_E |f_n(x)|dm \longrightarrow \int_E |f(x)|dm$$

试证，在任意可测子集$e\subset E$上，

$$\int_e |f_n(x)|dm \longrightarrow \int_e |f(x)|dm$$

证 由法杜定理，有

$$\int_e |f(x)|dm \leqslant \varliminf_{n} \int_e |f_n(x)|dm$$

及

$$\int_{E-e} |f(x)|dm \leqslant \varliminf_{n} \int_{E-e} |f_n(x)|dm$$

由数列极限的性质"$\lim\limits_{n}(x_n+y_n)=\varliminf\limits_{n} x_n+\varlimsup\limits_{n} y_n$",

得

$$\int_e |f(x)|dm = \int_E |f(x)|dm - \int_{E-e} |f(x)|dm$$

$$= \lim_{n} \int_E |f_n(x)|dm - \int_{E-e} |f(x)|dm$$

$$\geqslant \lim_{n}\left\{ \int_e |f_n(x)|dm + \int_{E-e} |f_n(x)|dm\right\}$$

$$- \varliminf_{n} \int_{E-e} |f_n(x)|dm = \varlimsup_{n} \int_e |f_n(x)|dm$$

$$+ \varliminf_{n} \int_{E-e} |f_n(x)|dm - \varliminf_{n} \int_{E-e} |f_n(x)|dm$$

$$= \varlimsup_{n} \int_e |f_n(x)|dm$$

综上得

$$\varlimsup_{n} \int_e |f_n(x)|dm \leqslant \int_e |f(x)|dm$$

$$\leqslant \varliminf_{n} \int_e |f_n(x)|dm$$

所以，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|dm=\int_e |f(x)|dm$$

45. 设$f(x)$在$(-\infty,\ \infty)$上可积，则

$$\lim_{h\to 0}\int_{(-\infty,\infty)} |f(x+h)-f(x)|dm=0$$

证 因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积，所以对任意$\varepsilon>0$，存在N_0，使

$$\int_{(-\infty,-N_0+1)} |f(x)|dm<\frac{\varepsilon}{8}\qquad \int_{(N_0-1,\infty)} |f(x)|dm<\frac{\varepsilon}{8}$$

于是，当$|h|<1$时，有

$$\int_{(-\infty,-N_0)} |f(x+h)-f(x)|dm\leqslant\int_{(-\infty,-N_0)} |f(x+h)|dm$$

$$+\int_{(-\infty,-N_0)} |f(x)|dm<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{4}$$

同样可证

$$\int_{(N_0,+\infty)} |f(x+h)-f(x)|dm<\frac{\varepsilon}{4}$$

因$f(x)$在$[-N_0-1,\ N_0+1]$上可积，根据参考文献[1]第四章定理2.8，存在连续函数$g(x)$，使

$$\int_{[-N_0-1,N_0+1]} |f(x)-g(x)|dm<\frac{\varepsilon}{6}$$

由$g(x)$在$[-N_0-1,N_0+1]$上的一致连续性，存在$0<\delta<1$，使当$|h|<\delta$时，对一切$x\in[-N_0,N_0]$有

$$|g(x+h)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{12N_0}$$

于是

$$\int_{[-N_0,N_0]}|g(x+h)-g(x)|dm\leqslant\int_{[-N_0,N_0]}\frac{\varepsilon}{12N_0}dm=\frac{\varepsilon}{6}$$

从而

$$\int_{[-N_0,N_0]}(|fx+h)-f(x)|dm$$

$$\leqslant\int_{[-N_0,N_0]}|f(x+h)-g(x+h)|dm$$

$$+\int_{[-N_0,N_0]}|g(x+h)-g(x)|dm$$

$$+\int_{[-N_0,N_0]}|g(x)-f(x)|dm<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{2}$$

于是当 $|h|<\delta(\delta<1)$ 时,

$$\int_{(-\infty,\infty)}|f(x+h)-f(x)|dm$$

$$=\int_{(-\infty,-N_0)}|f(x+h)-f(x)|dm$$

$$+\int_{[-N_0,N_0]}|f(x+h)-f(x)|dm$$

$$+\int_{(N_0,+\infty)}|f(x+h)-f(x)|dm$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

即 $$\lim_{h\to 0}\int_{(-\infty,\infty)}|f(x+h)-f(x)|dm=0$$

46. 设$f(x)$是$(-\infty,\ \infty)$上的可积函数，试证

$$f^{\wedge}(x)=\int_{(-\infty,\infty)}e^{-itx}f(t)dt$$

是$(-\infty,\ \infty)$上的连续函数，且

$$f^{\wedge}(x)=\frac{d}{dx}\int_{(-\infty,\infty)}\frac{e^{-itx}-1}{-it}f(t)dt$$

证 对任何$x\in R$,

$$f^{\wedge}(x+\varDelta x)-f^{\wedge}(x)$$

$$=\int_{(-\infty,\infty)}\left[e^{-it(x+\Delta x)}-e^{-itx}\right]f(t)dt$$

因为

$$\left|\left[e^{-it(x+\Delta x)}-e^{-itx}\right]f(t)\right|\leqslant 2|f(t)|\in L(-\infty,\infty)$$

由勒贝格控制收敛定理，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f^{\wedge}(x+\varDelta x)-f^{\wedge}(x)\right]$$

$$=\int_{(-\infty,\infty)}\lim_{\Delta x\to 0}\left[e^{-it(x+\Delta x)}-e^{-itx}\right]f(t)dt=0$$

此即$f^{\wedge}(x)$在$(-\infty,\ \infty)$上连续。

令

$$g(x)=\int_{(-\infty,\infty)}\frac{e^{-itx}-1}{-it}f(t)\,dt$$

则

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\int_{(-\infty,\infty)}\left[\frac{e^{-it(x+\Delta x)}-1}{-it}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-itx}-1}{-it}\right]\frac{f(t)}{\Delta x}dt$$

$$=\int_{(-\infty,\infty)}\frac{e^{-itx}(e^{-it\Delta x}-1)}{-it}\frac{f(t)}{\Delta x}dt$$

由微分学中值定理

$$\left|\frac{e^{-itx}(e^{-it\Delta x}-1)}{-it}\frac{f(t)}{\Delta x}\right|$$

$$=\left|\frac{e^{-itx}e^{-it\theta\Delta x}(-it\Delta x)}{-it\Delta x}f(t)\right|$$

$$\leqslant|f(t)|\in L(-\infty,\infty)$$

其中$0<\theta<1$，再由勒贝格控制收敛定理，得

$$\frac{d}{dx}g(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{(-\infty,\infty)}e^{-itx}e^{-it\theta\Delta x}f(t)dt$$

$$=\int_{(-\infty,\infty)}e^{-itx}f(t)\,dt=f^{\wedge}(x)$$

47. 设$f(x)$是(a,b)上的可积函数，试证

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(a,b)} f(x)e^{itx}dx=0$$

证 由于在a，b两点补充或改变函数值，不改变函数的可积性和积分值，故可将题中(a,b)改为$[a,b]$。

(1) 当$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数时，令

$$M=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

因为$f(x)$在$[a,b]$上一致连续，任给$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，使当x'，$x''\in[a,b]$，$|x'-x''|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

对$[a,b]$作分割，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$，使得$|x_k-x_{k+1}|<\delta\ (k=0,1,\cdots,m-1)$，则

$$\left|\int_{(a,b)} f(x)e^{itx}dx\right|=\left|\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)e^{itx}dx\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]}[f(x)-f(x_k)]e^{itx}dx$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f(x_k)e^{itx}dx\ \Big|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_{[x_k,x_{k+1}]}|e^{itx}|dx$$

$$+M\sum_{k=0}^{m-1}\left|\int_{[x_k,x_{k+1}]} e^{itx}dt\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]} dx$$

$$+M\sum_{k=0}^{m-1}\left|\left[\frac{1}{it}\quad e^{itx}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=0}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)+M\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2}{t}$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Mm}{t}$$

于是当$t>\frac{4Mm}{\varepsilon}$时，有

$$\left|\int_{(a,b)} f(x)e^{itx}dx\right| \quad \varepsilon$$

故有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(a,b)} f(x)e^{itx}dx=0$$

(2) 当$f(x)$在$[a,b]$上可积时，由参考文献[1]第四章定理2.8，任给$\varepsilon>0$，在$[a,b]$上存在连续函数$g(x)$，满足

$$\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

由(1)，对于连续函数$g(x)$，存在T，使当$t>T$时，有

$$\left|\int_{[a,b]} g(x)e^{itx}dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)e^{itx}dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{[a,b]}[f(x)-g(x)]e^{itx}dx\right|+\left|\int_{[a,b]} g(x)e^{itx}dx\right|$$

$$<\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|dx+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

此即证明

$$\lim_{t\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)e^{itx}dx=0$$

48. 设$mE<\infty$，则$f(x)$在E上可积的充要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)$$

收敛。当$mE=\infty$时，结论是否成立？

证 设$E_n=E(n\leqslant|f|<n+1)$，则

$$n\cdot mE_n\leqslant\int_{E_n}|f(x)|dm\leqslant(n+1)mE_n$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot mE_n\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)mE_n$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot mE_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} mE_k=\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)mE_n=\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)+mE$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)+mE$$

若$f(x)$在E上可积，则$f(x)$在E上几乎处处有限，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm$$

$$=\int_E|f(x)|dm<+\infty$$

反之，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)<\infty$，则$f(x)$在$E$上几乎处处有限。又据$mE<\infty$，得

$$\int_E|f(x)|dm=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m(|f|\geqslant n)+mE<+\infty$$

若$mE=\infty$，则充分性不成立。例如，设$E=[1,\infty)$，$f(x)=\frac{1}{x}$，则有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)=0$，但$f(x)\overline{\in}L(E)$。

但必要性仍成立，这是因为，当$f(x)\in L$时，若令$E_0=$

$E(|f|\geqslant 1)$，则 $mE_0<\infty$，且 $f\in L(E_0)$，由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE_0(|f|\geqslant n)<\infty$$

但 $$mE_0(|f|\geqslant n)=mE(|f|\geqslant n) \qquad n=1,2,\cdots$$

于是，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)<\infty$$

49. 设 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在集 X，Y 上的 μ，γ 可积函数，则 $h(x,y)=f(x)g(y)$ 是乘积空间 $X\times Y$ 上的可积函数，且有

$$\int_{X\times Y} hd(\mu\times\gamma)=\int_X fd\mu\int_Y gd\gamma$$

证 (1) 当 $f(x)=\chi_{E_1}(x)$，$g(y)=\chi_{E_2}(y)$，其中 E_1，E_2 分别为集 X，Y 上的 μ，γ 可测集时，

$$h(x,y)=\chi_{E_1\times E_2}(x,y)$$

于是

$$\int_{X\times Y} hd(\mu\times\gamma)=\mu(E_1)\gamma(E_2)$$

$$=\int_X fd\mu\int_Y gd\gamma$$

(2) 当 $f(x)$，$g(y)$ 分别为 X，Y 上的简单函数时，设

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k\chi_{E_k}(x) \qquad g(y)=\sum_{j=1}^{n} b_j\chi_{E_j}(y)$$

则

$$h(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_kb_j\chi_{E_k\times E_j}(x,y)$$

为$X\times Y$上的简单函数，由(1)，有

$$\int_{X\times Y}h(x,y)d(\mu\times\gamma)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_kb_j\mu(E_k)\gamma(E_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}a_k\mu(E_k)\sum_{j=1}^{n}b_j\gamma(E_j)$$

$$=\int_X f(x)d\mu\int_Y g(y)d\gamma$$

(3) 当$f(x)\geqslant 0$，$g(y)\geqslant 0$时，因为$f(x)$在X上μ可积，所以在X上存在简单函数列$\{f_n(x)\}$，满足

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots\quad \lim_n f_n(x)=f(x)$$

且

$$\lim_n\int_X f_n(x)d\mu=\int_X f(x)d\mu$$

同理，在Y上存在简单函数列$\{g_n(y)\}$，满足

$$0\leqslant g_1(y)\leqslant g_2(y)\leqslant\cdots\leqslant g_n(y)\leqslant\cdots,\quad \lim_n g_n(y)=g(y)$$

且

$$\lim_n\int_Y g_n(y)d\gamma=\int_Y g(y)d\gamma$$

因为$\{f_n(x)g_n(y)\}$为$X\times Y$上的简单函数列，满足

$$0\leqslant f_1(x)g_1(y)\leqslant f_2(x)g_2(y)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)g_n(y)\leqslant\cdots$$

$$\lim_{n} f_n(x)g_n(y) = f(x)g(y) = h(x,y)$$

由勒维定理及(2)，得

$$\int_{X\times Y} h(x,y)d\mu d\gamma = \lim_{n} \int_{X\times Y} f_n(x)g_n(y)d\mu d\gamma$$

$$= \lim_{n} \int_X f_n(x)d\mu \int_Y g_n(y)d\gamma$$

$$= \int_X f(x)d\mu \int_Y g(y)d\gamma$$

(4) 当$f(x)$，$g(y)$分别在X，Y上μ，γ可积时，f_+，f_-在X上μ可积，g_+，g_-在Y上γ可积，由(3)，f_+g_+，f_-g_-，f_+g_-，f_-g_+在$X\times Y$上$\mu\times\gamma$可积，于是

$$h = h_+ - h_- = (f_+g_+ + f_-g_-) - (f_+g_- + f_-g_+)$$

在$X\times Y$上$\mu\times\gamma$可积，且

$$\int_{X\times Y} h\,d(\mu\times\gamma) = \int_{X\times Y} (f_+g_+ + f_-g_-)d(\mu\times\gamma)$$

$$-\int_{X\times Y} (f_+g_- + f_-g_+)d(\mu\times\gamma) = \int_X f_+d\mu \int_Y g_+d\gamma$$

$$+\int_X f_-d\mu \int_Y g_-d\gamma - \int_X f_+d\mu \int_Y g_-d\mu$$

$$-\int_X f_-d\mu \int_Y g_+d\gamma$$

$$= \left(\int_X f_+d\mu - \int_X f_-d\mu\right)\left(\int_Y g_+d\gamma - \int_Y g_-d\gamma\right)$$

$$= \int_X f d\mu \int_Y g d\gamma$$

50. 设$(X, R, \mu) = (Y, \varphi, \gamma)$为勒贝格测度的单位区间这样的测度空间，$E$是$X \times Y$中适合下述条件的集：对每个$x$与每个$y$，$E_x$与$X - E_y$都是可列集，那么，$E$是不可测的。

证 假设E是可测的，则有

$$(\mu \times \gamma)\ (E) = \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) d\mu d\gamma$$

$$= \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) dm\, dm$$

由Fubini定理，

$$\int_{X \times Y} \chi_E(x, y) dm\, dm$$

$$= \int_Y mE_x(y) d\, m = \int_X mE^y(x) dm$$

但因为E_x与$X - E^y$为可列集，所以

$$mE_x = 0, \quad mE^y = m(X - (X - E^y)) = mX = 1$$

所以

$$\int_Y mE_x(y) dm = 0 \qquad \int_X mE^y(x) dm = 1$$

与前述等式矛盾。所以E是不可测的。

51. 设在可测空间(X, R)上给定两个测度μ_1, μ_2，令$\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$（$a_1, a_2$是任意实数）。试证存在$X$的分解$X = A \cup B$，$A \cap B = \phi$，使$A$为$\mu$的正集，$B$为$\mu$的负集（$\mu$的正集$A$的定义为：对每个可测集$E$，$E \cap A$可测，且$\mu(E \cap A)$

$\geqslant 0$，负集的定义类似）。

证 首先应假设μ_1，μ_2中至少有一个为有限测度，否则当a_1，a_2异号时，将可能出现$\infty-\infty$的情形。在此假设下，$\mu(E)$不可能既出现$+\infty$，又出现$-\infty$，不妨假定

$$-\infty<\mu(E)\leqslant+\infty$$

易见，可列个负集的并仍为负集。设

$$\beta=\inf\{\mu(s)\text{：}s\text{为可测负集}\}$$

又设$\{B_i\}$为可测负集列，满足

$$\lim_i \mu(B_i)=\beta \qquad B=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

则B是一可测负集，且$\mu(B)=\beta$。

再令$A=X-B$，可证A为正集。事实上，若A不是正集，则必存在$E_0\subset A$，使$\mu(E_0)<0$。

E_0不可能为负集，否则$B\cup E_0$仍为负集，且

$$\mu(B\cup E_0)<\mu(B)=\beta$$

与β是下确界相矛盾。

因为E_0不是负集，所以必有$E\subset E_0$，使$\mu(E)>0$，由于$-\infty<\mu(E_0)<0$，可知任何$E\subset E_0$，$-\infty<\mu(E)<+\infty$。事实上，因为$\mu(E_0)=\mu(E_0-E)+\mu(E)$，$-\infty<\mu(E-E_0)\leqslant+\infty$，若$\mu(E)=+\infty$，则$\mu(E_0)=+\infty$，与$\mu(E_0)<0$矛盾。

由上可见，对任何自然数n，$E\subset E_0$，且$\mu(E)>\frac{1}{n}$的集E最多为有限个，将$\mu(E)>\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$的至多可列个集$E$排列为

$$E_1,E_2,\cdots,E_k,\cdots$$

令 $$F_0 = E_0 - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

则对任何含于F_0可测子集F，必有$\mu(F)\leqslant 0$.因此F_0是一个负集。

又F_0与B不相交，且$\mu(F_0)=\mu(E_0)-\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\mu(E_0)<0$. 于是$B\cup F_0$为负集，且$\mu(B\cup F_0)=\mu(B)+\mu(F_0)<\mu(B)=\beta$，又与$\beta$为下确界相矛盾。

因此$\mu(E_0)<0$的假设不能成立，所以A为一个正集。

52. 研究函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}$的可微性，其中记号$\{y\}$表示数$y$与它最近整数间的距离，例如$\{3.1\}=0.1$, $\{3.5\}=0.5$.

解 显然$f(x)$以1为周期，因此我们只要对$0\leqslant x<1$进行讨论。

若将$[0, 1)$中的x写成无穷小数的形式

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

则 $$10^n x=a_1a_2\cdots a_n+0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

当$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots\leqslant\frac{1}{2}$时，$\{10^n x\}=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$

而当$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots>\frac{1}{2}$时，$\{10^n x\}=1-0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$

可以证明，对$[0, 1)$中任意的$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，存在数列$h_m(m=1,2,\cdots)$，当$m\to\infty$时，$h_m\to 0$，但

$$\Delta_m f(x)=\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$$

的极限不存在，于是$f(x)$处处不可微。

事实上，当 a_m 等于 4 或 9 时，取 $h_m=-10^{-m}$，否则取 $h_m=10^{-m}$，显然当 $m\to\infty$时，$h_m\to 0$，而

$$\Delta_m f(x)=\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\}}{10^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}}{\pm 10^{-m}}$$

$$=\quad 10^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\}-\{10^n x\}}{10^n}$$

当$n\geqslant m$时，

$$\{10^n(x\pm 10^{-m})\}-\{10^n x\}=\{10^n x\pm 10^{n-m}\}-\{10^n x\}=0$$

当$n<m$时，

$$\{10^n(x\pm 10^{-m})\}=\{10^n x\pm 10^{n-m}\}=\{10^n x\}\pm 10^{n-m}$$

$$10^m\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\}-\{10^n x\}}{10^n}=10^m\frac{\pm 10^{n-m}}{10^n}=\pm 1$$

于是，$\Delta_m f(x)$是m个± 1相加，它是一个整数，当m为奇数时为奇数，当m为偶数时为偶数。即$\{\Delta_m f(x)\}$是一个奇偶相间的整数列，这样的数列是不可能有极限存在的。

此外，$f(x)$处处连续。事实上，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}$$

有收敛的优势级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}$，故在$(-\infty,\infty)$上一致收敛。

又级数的每一项皆在$(-\infty,\infty)$上连续，由数学分析的知识知，其和函数$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续。

53．设$\{f_n(x)\}$为$[a,b]$上囿变函数列，$f_n(x)$收敛于一有限函数$f(x)$，且若$\bigvee_a^b(f_n)\leqslant K(n=1,2,\cdots)$，则$f(x)$亦囿变。

证 在$[a,b]$上任取一组分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$$

则对任何n，有

$$\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant\bigvee_a^b(f_n)\leqslant K$$

而

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

所以

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k)-f_n(x_{k-1})|\leqslant K$$

故有
$$\bigvee_a^b(f)\leqslant K$$

即$f(x)$在$[a,b]$上囿变。

54．若函数$f(x)$在$[a,b]$上为绝对连续，且几乎处处存在非负导数，则$f(x)$必为增函数。

证 任取$x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，由$f(x)$的绝对连续性及$f'(x)\geqslant0$，得

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f'(t)dt\geqslant0$$

即$f(x_2)\geqslant f(x_1)$，亦即$f(x)$为增函数。

55．讨论函数$f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}(0\leqslant x\leqslant1;\alpha,\beta>0)$的囿变性，绝对连续性。

解 当$\alpha\leqslant\beta$时，在[0,1]上取分点 $x_0=0$，$x_n=1$，

$x_i=\left[\frac{1}{(n-1-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{1}{\beta}}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\geqslant\sum_{i=2}^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{(n-1-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}+\left[\frac{1}{(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}$$

$$\geqslant\sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1-i)\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$>\sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{(n-i)\pi}+\frac{1}{(n-i+1)\pi}\right]>\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}$$

于是

$$\bigvee_a^b(f)=\sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=+\infty$$

所以$f(x)$在[0,1]上非囿变，非绝对连续。

当$\alpha>\beta$时，若$x\neq0$，

$$|f'(x)|=\left|\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta}\right|$$

$$\leqslant\alpha x^{\alpha-1}+\beta x^{\alpha-\beta-1}$$

因为$\alpha-1>-1$，$\alpha-\beta-1>-1$，所以$f'(x)$在[0,1]上R可积，于是

$$(L)\int_0^x f'(t)dm=(R)\int_0^x f'(t)dt$$

$$= \lim_{\delta\to 0} (R)\int_{\delta}^{x} f'(t)dt$$

$$= \lim_{\delta\to 0} t^{\alpha}\sin\frac{1}{t^{\beta}}\Big|_{\delta}^{x}$$

$$= x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}} - 0 = f(x)$$

故由参考文献[1]第四章定理 6.8 知，$f(x)$在$[0,1]$上绝对连续，囿变。

56. 试作一增函数。使其不连续点处处稠密。

解 设$[0,1]$上的全体有理点为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

令

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\{n:\ a_n < x\}} \dfrac{1}{2^n} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

则$f(x)$为增函数，事实上，若$x_2 > x_1$，则

$$\{n:\ a_n < x_2\} \supset \{n:\ a_n < x_1\}$$

因此$f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

另一方面，$[0,1]$上的任何有理点a_k都是$f(x)$的不连续点，即$f(x)$的不连续点在$[0,1]$上处处稠密，事实上，若$x > a_k$，则

$$f(x) - f(a_k) \geqslant \frac{1}{2^k}$$

因此

$$f(a_k + 0) - f(a_k) \geqslant \frac{1}{2^k}$$

故$f(x)$即为所要作的函数。

57. $f(x)$为$[a,b]$上的可积正函数，设$0<q\leqslant b-a$，$S=\{e:\ e\subset[a,b],\ me\geqslant q\}$，试证

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)dx\right\}>0$$

58. 设 $g(x)=\sup_{i\in I}\{f_i(x)\}$，$\psi(x)=\inf_{i\in I}\{f_i(x)\}$

其中$f_i(x)(i\in I)$为可测集E上的可积函数，试问$g(x)$，$\psi(x)$是否在E上可积？

答 当I为有限集时，$g(x)$，$\psi(x)$在E上可积；否则，$g(x)$，$\psi(x)$在E上不一定可积。

59. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，而在$[a,b]$外等于0，设

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt$$

试证

$$\int_a^b|\varphi(x)|dx\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$$

60. 假设$\{f_n(x)\}$为E上的非负可积函数列，如果$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=0$，则$f_n(x)$测度收敛于0，并举例说明在题设下不能得到$f_n(x)$几乎处处收敛于0．

61. 设$mE<+\infty$，$f(x)\in L(E)$，$E_n=E(|f|\geqslant n)$，试证

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot mE_n=0$$

提示 利用第四章习题2的结论及积分的绝对连续性。

62. 设$mE<\infty$，$f,g,f_n,g_n\in L(E)$，$n=1,2,\cdots$，又

$$\int_E|f_n-f|dx\to0,\quad\int_E|g_n-g|dx\to0\ (n\to\infty)$$

若$f_n(x)$在E上一致有界，则

$$\int_E |f_n g_n - fg| dx \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

63. 证明
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x}\cos x dx = 0$$

64. 设$f, f_n (n=1,2,\cdots)$是R上的可积函数，$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$，且$\int_R |f_n| dx \longrightarrow \int_R |f| dx \quad (n\to\infty)$，则

(i) $\int_E |f_n| dx \to \int_E |f| dx \qquad (n\to\infty)$

对一切可测集E成立；

(ii) $\int_R |f_n - f| dx \to 0 \quad (n\to\infty)$；

(iii) $\int_R f_n g dx \to \int_R fg dx \quad (n\to\infty)$

对一切有界可测函数$g(x)$成立。

65. 若$\{f_n(x)\}$是可测集E上的可积函数列，且
$$\sum_{n=1}^\infty \int_E |f_n(x)| dx < \infty$$

试证明

(i) $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$在E上几乎处处收敛于一几乎处处有限的函数$f(x)$；

(ii) $f(x)$在E上可测；

(iii) $f(x)$在E上可积，且
$$\int_E f(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_E f_n(x) dx$$

66. 设$mE<\infty$，E上的非负可积函数列$\{f_n(x)\}$满足

(i) $\{f_n(x)$依测度收敛于$F(x)$；

(ii) 任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$e\subset E$，$me<\delta$时，对一切$n=1,2,\cdots$，有$\int_e f_n(x)dx<\varepsilon$成立，则有

(1) $F(x)$为E上几乎处处非负的可测函数；

(2) $F(x)$在E上可积；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E F(x)dx$

67. 设$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$定义在$E=(0,1)\times(0,1)$上，证$f(x,y)$在$E$上不可积。

68. (i) 求函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x=0\\ 1-x, & \text{当}0<x<1\\ 5, & \text{当}x=1\end{cases}$$ 在$[0,1]$上的总变分；

(ii) 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{当}x<1\\ 10, & \text{当}x=1\\ x^2, & \text{当}x>1\end{cases}$$ 在$[0,2]$上的总变分。

69. $f(x)$在$[a,b]$上为囿变函数的充要条件是：存在这样一个增函数$\varphi(x)$，使对任意的$x\in[a,b]$，$h>0$（$x+h\in[a,b]$）恒有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\varphi(x+h)-\varphi(x)$$

70. 设$f(x)$和$g(x)$是$[a,b]$上的囿变函数，证明集合$\{(f(x),\ g(x)):\ x\in[a,b]\}$不可能充满一个正方形。

71. 囿变连续函数的一致收敛级数之和是否一定是囿变函数？

答 不一定.如考虑定义在[0,1]上的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，其中

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sin n\pi[x(n+1)-1] & \text{当} x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{1}{n}\right]\text{时}\\ 0 & \text{当} x\in[0,1]-\left[\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{1}{n}\right]\text{时}\end{cases}$$

$$n=1,2,\cdots$$

72. 试证，若 $f(x)$在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件，则$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续。反之是否成立？

答 反之不一定成立。

第三章 函数空间L^p

一、基本概念和主要定理

L_p空间 设$p\geqslant 1$，若$|f|^p$在可测集E上可积，称f是E上的p幂可积函数。p幂可积函数构成的类，称为L^p空间。记为$L^p(E)$或简记为L^p。即

$$L^p=\{f: \int_E |f|^p dm<\infty\}$$

对于$f\in L^p$，称

$$\|f\|_p=\{\int_E |f|^p dm\}^{1/p}$$

为f的范数。范数$\|f\|_p$满足范数公理：

(i) $\|f\|_p\geqslant 0$，等号当且仅当$f\sim 0$时成立；

(ii) $\|af\|_p=|a|\|f\|_p$，a为数；

(iii) $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$，$f$，$g\in L^p$

称上述不等式$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$为明可夫斯基(Minkowski)不等式。

对于$f\in L^p$，$g\in L^p$，称$\|f-g\|_p$为f与g之间的距离，它满足距离公理：

(i) $\|f-g\|_p\geqslant 0$，等式当且仅当$f\sim g$时成立；

(ii) $\|f-g\|_p=\|g-f\|_p$；

(iii) $\|f-g\|_p\leqslant\|f-h\|_p+\|h-g\|_p$，$f$，$g,h\in L^p$

于是，L^p是距离空间。

本性有界函数空间 若定义在可测集E上的可测函数f

满足 $\inf\limits_{me=0} \sup\limits_{x\in E-e} |f(x)|<\infty$，则称$f$为$E$上的本性有界函数。本性有界函数构成的类称为本性有界函数空间。记为$L^\infty(E)$或简记为L^∞。

对$f\in L^\infty$，称

$$\|f\|_\infty=\inf_{me=0} \sup_{x\in E-e} |f(x)|$$

为f的范数。

相伴数与霍尔得（Hölder）不等式 设$p>1$，q满足等式$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则称$p$，$q$为相伴数。显然$q>1$，约定，$p=1$的相伴数为$q=\infty$，$p=\infty$的相伴数为$q=1$．

设$p\geqslant 1$，q为相伴数，则对任何$f\in L^p$，$g\in L^q$，有$fg\in L$，且有不等式

$$\left|\int_E fgdm\right|\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$$

成立，称此不等式为霍尔得不等式。

强收敛与弱收敛 设f，$f_n\in L^p$，$n=1,2,\cdots$，若f_n与f的距离$\|f_n-f\|_p$收敛于0（$n\to\infty$），则称f_n强收敛于f或称f_n依范数收敛于f。称f是f_n的强极限，简记为

$$f_n\xrightarrow{\text{强}}f$$

设$f,f_n\in L^p$，$n=1,2,\cdots$，若对每个$g\in L^q(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,g\,dm=\int_E f\,g\,dm$$

则称f_n在L^p中弱收敛于f，记作$f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$。

基本列与完备性　设f_n是L^p中的元列，如果当n，$m\to\infty$时，有$\|f_m-f_n\|\to 0$，则称f_n是L^p中的基本列。如果L^p空间的任何基本列f_n，都有$f\in L^p$，使$f_n\xrightarrow{强}f$，则称L^p空间是完备的。

稠密与可分性　设A是L^p的一个子类，若对任一个$f\in L^p$，恒有元列$g_n\in A$，使$f_n\xrightarrow{强}f$，则称A在L^p中稠密。如果存在可列子类A，使A在L^p中稠密，则称L^p具有可分性。

傅立叶（Fourier）**变式**　设$f(x)$是$(-\infty,\ \infty)$上的可积函数，称含参量积分

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx$$

为可积函数f的傅立叶变式。

设$f\in L^2_{-\infty,\infty}$，则$\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}f(x)e^{-itx}dx$按$L^2$意义强收敛于一个函数$\hat{f}(t)$，称之为$f$依$L^2$意义的傅立叶变式，并记为

$$\hat{f}(t)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}f(x)e^{-itx}dx$$

两个函数的卷积　两个函数$f(x)$，$g(x)$的卷积指

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

$L^2(E)$中的标准直交系　设$mE<\infty$，$\omega_n\in L^2(E)$且

$$\int_E\omega_i\omega_j dm=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

则称$\{\omega_n\}$为$L^2(E)$中的标准直交系。

定理1 L^p是一线性空间。

定理2 设$f, f_n \in L^p$，$n=1, 2, \cdots$，若 $f_n \xrightarrow{强} f$，则 $f_n \xrightarrow{弱} f$。

定理3 L^p空间是完备的。

定理4 设E是有界可测集，则$L^p(E)$是可分的。

定理5 （黎曼—勒贝格定理） 设 $f \in L_{-\infty,\infty}$，则当 $t \to \pm\infty$时，$\hat{f}(t) \to 0$。

定理6 设$x^r f(x)$在$(-\infty, \infty)$上可积，则$\hat{f}(t)$ 为r阶可微，且有等式

$$\hat{f}^{(r)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)^r e^{-itx} dx$$

定理7 设$f(x) \in L^2_{-\infty,\infty}$，$\hat{f}(t)$是它的依$L^2$意义的傅立叶变式，则$\hat{f} \in L^2_{-\infty,\infty}$，且有巴塞弗(Parseval)公式成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt$$

定理8 设$f \in L$，$g \in L$，则有

$$\widehat{(f*g)}(t) = 2\pi \hat{f}(t)\hat{g}(t)$$

当$f \in L^2$，$g \in L^2$时，有

$$(f*g)(t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)\hat{g}(u) e^{itu} du$$

二、例题、习题与解法

1. 问在L^2中弱收敛于f的元列是否测度收敛？

解 不一定测度收敛。例如：$\{\sin nx\}$为$L^2[0,\pi]$中的元列，对任意的$f\in L^2[0,\pi]\subset L[0,\pi]$，由黎曼—勒贝格引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\pi]}f(x)\sin nx\ dm=0$$

即$\{\sin nx\}$弱收敛于$F(x)=0$.但对任意$n=1,2,\cdots$

$$mE(|\sin nx-0|\geqslant\frac{1}{2})\geqslant\frac{\pi}{3}$$

所以$\{\sin nx\}$并非测度收敛于$F(x)$。

2. 设在L^2中$f_n\xrightarrow{强}f$，又$f_n\xrightarrow{a.e}g$，则$f\sim g$.

证 任给$\varepsilon>0$，令

$$E_n(\varepsilon)=E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$$

则

$$\int_E|f_n-f|^2dm\geqslant\int_{En(\varepsilon)}|f_n-f|^2dm\geqslant\varepsilon^2mE_n(\varepsilon)$$

由$\int_E|f_n-f|^2dm\to0$即得

$$mE_n(\varepsilon)\to0\quad(n\to\infty)$$

也即f_n测度收敛于f。再由黎斯定理，存在子列$\{f_{n_k}\}$，几乎处处收敛于f. 而$\{f_{n_k}\}$几乎处处收敛于g，所以$f\sim g$.

3. 设$f,f_n\in L^p(p\geqslant1)$，$f_n\xrightarrow{a.e}f$，又设

$$\int_E|f_n|^pdm\to\int_E|f|^pdm$$

则对任何可测子集$e\subset E$，有

$$\int_e |f_n|^p dm \to \int_e |f|^p dm$$

证 因为$f_n \xrightarrow{a.e} f$，所以$|f_n|^p \xrightarrow{a.e} |f|^p$，由第二章习题4，即得所要的结论。

4. 设$f_n(x)$是L^2中的序列，若f_n测度收敛于f，$|f_n| \leqslant K$，K为常数，则$f_n \xrightarrow{弱} f$。

证 因为$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$，所以存在子列$\{f_{n_k}(x)\}$几乎处处收敛于$f(x)$，于是$\{f_{n_k}^2(x)\}$几乎处处收敛于$f^2(x)$，由法杜定理，得

$$\int_E f^2 dm \leqslant \lim_k \int_E f_{n_k}^2 dm \leqslant K^2$$

即$f\in L^2$，且$|f| \leqslant K$。

以下不妨设$E=(-\infty, +\infty)$，否则在$\mathscr{C}E$上，令$f_n(x)=0$，$f(x)=0$。

（1） 先证对L^2中的任意有界可测函数$g_1(x)$有

$$\lim_n \int_E f_n(x)g_1(x)dm = \int_E f(x)g_1(x)dm$$

由于$g_1(x)\in L^2$，对任意的$\varepsilon>0$，存在$M>0$，使

$$\int_{|x|>M} |g_1|^2 dm < \left(\frac{\varepsilon}{4K}\right)^2$$

于是由许瓦兹不等式，得

$$\int_{|x|>M} |f_n-f||g_1|dm \leqslant \left\{\int_{|x|>M} |f_n-f|^2 dm\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left\{\int_{|x|>M} |g_1|^2 dm\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon/2$$

设 $|g_1(x)| \leqslant S$，$E_1=[-M, M]$，则对任意的 $\sigma>0$，

$$\int_{E_1} |f_n-f|\ |g_1|\, dm$$

$$=\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)} |f_n-f|\cdot|g_1|\, dm$$

$$+\int_{E_1(|f_n-f|<\sigma)} |f_n-f|\ |g_1|\, dm$$

$$\leqslant S\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)} |f_n-f|\, dm+S\sigma mE_1$$

$$\leqslant S\left\{\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)} |f_n-f|\, dm\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)} dm\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+S\sigma mE_1$$

$$\leqslant 2KS\left\{mE_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)\right\}^{\frac{1}{2}}+2MS\sigma$$

取 $\sigma<\frac{\varepsilon}{8MS}$，固定 σ，因为

$$\lim_{n\to\infty} mE_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0$$

所以存在 N，使当 $n>N$ 时，

$$mE_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)<\left(\frac{\varepsilon}{8KS}\right)^2$$

于是当 $n>N$ 时，

$$\int_{E_1} |f_n-f|\cdot|g_1|\, dm<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\int_E f_n g_1 dm-\int_E f g_1 dm\right|\leqslant\int_E |f_n-f|\cdot|g_1|\, dm$$

$$= \int_{|x|>M} |f_n - f| \cdot |g_1| \, dm + \int_{E_1} |f_n - f| \cdot |g_1| \, dm$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即

$$\lim_n \int_E f_n g_1 dm = \int_E f g_1 dm$$

（2）证 $f_n \xrightarrow{弱} f$.

任取一个$g(x) \in L^2$，由参考文献［1］第五章引理2.1，对任给的$\varepsilon > 0$，在L^2中存在有界可测函数$g_1(x)$，使

$$\|g - g_1\| < \frac{\varepsilon}{3K}$$

由已证的（1），存在N，使当$n > N$时，

$$\left| \int_E (f_n - f) g_1 dm \right| < \varepsilon/3$$

于是

$$\left| \int_E (f_n - f) g dm \right| \leqslant \left| \int_E f_n (g - g_1) dm \right| + \left| \int_E (f_n - f) g_1 dm \right| + \left| \int_E f (g_1 - g) dm \right|$$

$$\leqslant \|g - g_1\| \cdot \|f_n\| + \varepsilon/3 + \|f\| \cdot \|g - g_1\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3K} K + \varepsilon/3 + K \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon$$

即

$$\lim_n \int_E f_n g dm = \int_E f g dm$$

由$g\in L^2$的任意性，证得了$f_n \xrightarrow{弱} f$.

5. 设$F(x)$是L^p（$p>1$）中某个元的不定积分，则渐近式

$$F(x+h)-F(x)=o(h^{1-\frac{1}{p}}) \qquad (h\to 0)$$

成立。

证 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$， $f(t)\in L^p$，则

$$\left|F(x+h)-F(x)\right| \leqslant \int_x^{x+h}\left|f(t)\right|dt$$

$$\leqslant \left\{\int_x^{x+h}|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\int_x^{x+h}dt\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \|f\|_p\cdot h^{1-\frac{1}{p}}=o\left(h^{1-\frac{1}{p}}\right)$$

$$(h\to 0)$$

6. 设 $f, f_n\in L^p$ （$p\geqslant 1$），$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ ，则在L^p中，$f_n\xrightarrow{弱} f$的充要条件是 $\|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p$.

证 必要性：由$\left|\|f_n\|_p-\|f\|_p\right|\leqslant\|f_n-f\|_p$ 即可得。

充分性：对任意的$\varepsilon>0$，因为$f\in L^p$，即$|f|^p\in L$，所以存在K，使

$$\left\{\int_{|x|>K}|f(x)|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

设 $E_0=(-\infty,\ -K)\cup(K,\infty,)$因为 $\|f_n\|_p\longrightarrow\|f\|_p$，且 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$，由本章第3题知

$$\left\{\int_{E_0}|f_n|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}}\longrightarrow\left\{\int_{E_0}|f|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}}$$

于是存在N_1，当$n>N_1$时，有

$$\left\{\int_{E_0}|f_n|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

因此

$$\int_{E_0}|f_n-f|^p dm\leqslant\left\{\left[\int_{E_0}|f_n|^p dm\right]^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left[\int_{E_0}|f|^p dm\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^p<\frac{\varepsilon}{2}$$

因为$\|f_n\|_p\longrightarrow\|f\|_p$，所以存在$N_2\geqslant N_1$，当$n>N_2$时

$$\|f_n\|_p^p<\|f\|_p^p+1$$

又$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$，故在$E_1=[-K,\ K]$上$f_n$测度收敛于$f$，因此，对正数$\sigma<\frac{\varepsilon}{8K}$，存在$N>N_2$，使当$n>N$时，

$$mE_1(|f_n-f|^p\geqslant\sigma)<\frac{\varepsilon}{4(2\|f\|_p^p+1)}$$

于是

$$\int_{E_1}|f_n-f|^p dm=\int_{E_1(|f_n-f|<\sigma)}|f_n-f|^p dm$$

$$+\int_{E_1(|f_n-f|\geq\sigma)}|f_n-f|^p\,dm$$

$$<\sigma\cdot mE_1+(2\|f\|_p^p+1)mE_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

故当$n>N$时，有

$$\int_E|f_n-f|^p dm=\int_{E_0}|f_n-f|^p dm+\int_{E_1}|f_n-f|^p dm$$

$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

即 $\|f_n-f\|_p^p\longrightarrow 0$，亦即 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$。

7. 设$f\in L^p(E)$，e为E的可测子集，则

$$\left\{\int_E|f|^p dm\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\int_e|f|^p dm\right\}^{1/p}+\left\{\int_{E-e}|f|^p dm\right\}^{1/p}$$

证 令

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & x\in e\\ 0 & x\in E-e\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}0 & x\in e\\ f(x) & x\in E-e\end{cases}$$

则由明可夫斯基不等式，得

$$\left\{\int_E|f|^p dm\right\}^{1/p}=\left\{\int_E|f_1+f_2|^p dm\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant\left\{\int_E|f_1|^p dm\right\}^{1/p}+\left\{\int_E|f_2|^p dm\right\}^{1/p}$$

$$=\left\{\int_e|f|^p dm\right\}^{1/p}+\left\{\int_{E-e}|f|^p dm\right\}^{1/p}$$

8. 设p，q，r为满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$的三个正数，则对任何可测函数$f$，$g$，$h$，有

$$\int_E |fgh|dm \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \|h\|_r$$

证 若$\|f\|_p$，$\|g\|_q$，$\|h\|_r$中至少有一个为∞，则不等式显然成立。

若$f\in L^p$，$g\in L^q$，$h\in L^r$，则

$$g^{\frac{p}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p}q} \qquad h^{\frac{p}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p}r}$$

因为

$$\frac{1}{\frac{p-1}{p}q}+\frac{1}{\frac{p-1}{p}r}=1$$

由霍尔得不等式，得

$$g^{\frac{p}{p-1}}h^{\frac{p}{p-1}}\in L^1，\text{即} gh\in L^{\frac{p}{p-1}}$$

且有

$$\int_E |gh|^{\frac{p}{p-1}}dm \leqslant \|g^{\frac{p}{p-1}}\|_{\frac{p-1}{p}q}\|h^{\frac{p}{p-1}}\|_{\frac{p-1}{p}r}$$

$$=\left\{\int_E |g|^q dm\right\}^{\frac{p}{(p-1)q}}\left\{\int_E |h|^r dm\right\}^{\frac{p}{(p-1)r}}$$

又因为$gh\in L^{\frac{p}{p-1}}$，$f\in L^p$，及$\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{p}{p-1}}=1$，再由霍尔得不等式，得$fgh\in L^1$，且

$$\int_E |fgh|dm \leqslant \|f\|_p \|gh\|_{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leqslant \|f\|_p \left\{ \int_E |g|^q dm \right\}^{1/q} \left\{ \int_E |h|^r dm \right\}^{1/r}$$

$$= \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

9. 设$f \in L^p(-\infty, \infty)$, $g \in L^q(-\infty,\infty)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p \geqslant 1$, 试证 $F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(x)dx$为$t$的连续函数。

证 (i)先证明

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}=0$$

事实上，任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使当$|h|<1$时，有

$$\left\{\int_{-\infty}^{-N} |f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}<\varepsilon/3$$

$$\left\{\int_{N}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}<\varepsilon/3$$

由本章第10题，存在$0<h_0<1$，使当$|h|<h_0$时，有

$$\left\{\int_{-N}^{N} |f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}<\varepsilon/3$$

从而

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}<\varepsilon$$

即有

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}=0$$

(ii)再证$F(t)$的连续性。

对任意的$t\in(-\infty,\infty)$，由霍尔得不等式，有

$$\left|F(t+\Delta t)-F(t)\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t+\Delta t)-f(x+t)|\,|g(x)|dx$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t+\Delta t)-f(x+t)|^p dx\right\}^{1/p}\|g\|_q$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\Delta t)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\|g\|_q$$

根据(i)，得

$$\lim_{\Delta t\to 0}|F(t+\Delta t)-F(t)|=0$$

即$F(t)$为t的连续函数。

10. 设$f\in L^p[a,b]$，$p>0$，试证

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}=0$$

$$(0<2\delta\leqslant b-a)$$

证 (i)先证明，对任意的$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的连续函数$\varphi(\chi)$，使

$$\left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^p dm\right\}^{1/p}<\varepsilon$$

事实上，令

$$E=[a,b],\qquad E_n=E(|f|>n)$$

由积分的绝对连续性，存在$\delta_1>0$，使当$e\subset E$，$me<\delta_1$时，

$$\left\{\int_e|f|^p dm\right\}^{1/p}<\frac{\varepsilon}{4}$$

又因为 $\lim\limits_n mE_n=0$，（见第二章习题33），所以存在N，使

$$mE_N<\delta_1$$

于是，有

$$N\cdot mE_N<\left\{\int_{E_N}|f|^p dm\right\}^{1/p}<\varepsilon/4$$

又由鲁津定理，存在闭集$F\subset E-E_N$，使

$$\left[m(E-E_N-F)\right]^{1/p}<\frac{\varepsilon}{4N}$$

而$f(x)$在F上是连续的，在$[a,b]$上作连续函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x) & x\in F\\ \text{函数保持线性} & x\in E-F\end{cases}$$

则$\varphi(x)$即为所求。事实上，$|\varphi(x)|\leqslant N$，而

$$\left\{\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p dm\right\}^{1/p}$$

$$=\left\{\int_F |f-\varphi|^p dm\right\}^{1/p}+\left\{\int_{E_N} |f-\varphi|^p dm\right\}^{1/p}$$

$$+\left\{\int_{E=E_N-F} |f-\varphi|^p dm\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\int_{E_N} |f|^p dm\right\}^{1/p}$$

$$+\left\{\int_{E_N} |\varphi|^p dm\right\}^{1/p}+2N\cdot\left\{m(E-E_N-F)\right\}^{1/p}$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

（ii）证本题的结论。

由已证明的(i)，对任意的$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的连续函数$\varphi(x)$，使

$$\left\{\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p dm\right\}^{1/p}<\varepsilon/3$$

由于$\varphi(x)$在$[a,b]$上一致连续，存在$0<\delta_2<\delta_1$，使对任何x'，$x''\in[a,b]$，当$|x'-x''|<\delta_2$时，有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{1}{b-a}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

因此，当$|h|<|\delta_2|$时，

$$\left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h)-f(x)|^p dm \right\}^{1/p}$$

$$\leqslant \left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h)-\varphi(x+h)|^p dm \right\}^{1/p}$$

$$+\left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dm \right\}^{1/p}$$

$$+\left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |\varphi(x)-f(x)|^p dm \right\}^{1/p}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

即

$$\lim_{h\to 0}\left\{ \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h)-f(x)|^p dm \right\}^{1/p}=0$$

11. 试证，当$1\leqslant r<p$时，$L^p\subset L^r$，假定基本集E的测度为有限。若$mE=\infty$，结论如何？

证 设$f\in L^p$，令

$$A=E(|f|\geqslant 1),\qquad B=E-A$$

则有

$$\int_E |f|^r dm=\int_A |f|^r dm+\int_B |f|^r dm$$

$$\leqslant\int_A |f|^p dm+mB<\infty$$

即$f\in L^r$，于是证得$L^p\subset L^r$。

当$mE=+\infty$时，结论不成立。例如，设$E=[1,+\infty)$，$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，则$f\in L^4$，但$f\overline{\in}L^2$。

12. 设$p>1$，$f_n\in L^p$，若在L^p中，$f_n\xrightarrow{强}f$，$f\in L^p$，当$1\leqslant r\leqslant p$时，在L^r中，$f_n\xrightarrow{强}f$，假定基本集E的测度为有

限。

证 令$A_n=E(|f_n-f|\geqslant 1)$，$B_n=E(|f_n-f|<1)$，则

$$\int_E |f_n-f|^r dm=\int_{A_n} |f_n-f|^r dm+\int_{B_n} |f_n-f|^r dm$$

$$\leqslant\int_{A_n} |f_n-f|^p dm+\int_{B_n} |f_n-f| dm$$

$$\leqslant\int_E |f_n-f|^p dm+\|f_n-f\|_p (mE)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

$$=\|f_n-f\|_p^p+\|f_n-f\|_p (mE)^{\frac{1}{q}}$$

由$\|f_n-f\|_p\to 0$，得$\|f_n-f\|_r\to 0$。

13. 试证$L^2(1,\ 0)$中标准直交系的基数不超过$\aleph_0$。

证 因为L^2为可分空间，所以存在L^2中的稠密子类

$$A=\{g_1,\ g_2,\ \cdots\}$$

设$\{\omega_i\}$为标准直交系，任一ω_k必在A中存在g_k，使得

$$\|\omega_k-g_k\|_2<\frac{1}{2}\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

且当$j\neq k$时，

$$\|\omega_k-\omega_j\|_2=\left\{\int_0^1(\omega_k-\omega_j)^2 dm\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\int_0^1\omega_k^2 dm+\int_0^1\omega_j^2 dm\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

所以

$$\|g_k-g_j\|_2=\|g_k-\omega_k+\omega_k-\omega_j+\omega_j-g_j\|_2$$

$$\geqslant\|\omega_k-\omega_j\|_2-\|g_k-\omega_k\|_2-\|g_j-\omega_j\|_2>\sqrt{2}-1$$

即不同的ω_i对应于A中不同的g_i，因此ω_j至多有可列个。

14. 设积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$对于任何$g\in L^2$都存在且为有限，则$f\in L^2$。

证法一 第一步证明：若在L^2中$f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$，则$\{\|f_n\|_2\}$有界。

1° 先证，若有一个$\varphi_0(x)\in L^2$，存在$M>0$及$r>0$，使对所有的n及满足$\|\varphi(x)-\varphi_0(x)\|\leqslant r^2$的任一$\varphi(x)$，总有

$$\left|\int_r^b f_n(x)\varphi(x)dx\right|\leqslant M$$

则$\{\|f_n\|_2\}$有界。

事实上，由于$h_n(x)=\dfrac{r}{\|f_n\|_2}f_n(x)+\varphi_0(x)(n=1,2,\cdots)$满足

$$\|h_n(x)-\varphi_0(x)\|_2\leqslant r$$

所以有

$$\|f_n\|_2=\frac{1}{\|f_n\|_2}\left|\int_a^b f_n^2(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^b\frac{f_n^2(x)}{\|f_n\|_2}dx+\frac{1}{r}\int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)dx\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{r}\left|\int_a^b f_n(x)\left[\frac{r}{\|f_n\|_2}f_n(x)+\varphi_0(x)\right]dx\right|$$

$$+\frac{1}{r}\left|\int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)dx\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{r}M + \frac{1}{r}M$$

此即说明$\{\|f_n\|_2\}$有界。

2° 证 $\{\|f_n\|_2\}$有界

反设 $\{\|f_n\|_2\}$ 无界，则由1°知，对$\varphi_0(x)\equiv 0$，$r=1$及$M=1$，存在$\varphi_1(x)$及n_1满足

$$\|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\|_2\leqslant 1, \quad \left|\int_a^b f_{n_1}(x)\varphi_1(x)dx\right|>1$$

容易看出，当φ与φ_1充分接近时，$\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi dx\right|>1$也成立。事实上，设 $\|\varphi-\varphi_1\|_2=\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi dx\right| \\
&\geqslant \left|\int_a^b f_{n_1}\varphi dx\right| - \left|\int_a^b f_{n_1}(\varphi-\varphi_1)dx\right| \\
&\geqslant \left|\int_a^b f_{n_1}\varphi_1 dx\right| \\
&\quad - \left\{\int_a^b f_{n_1}^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_a^b |\varphi-\varphi_1|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left|\int_a^b f_{n_1}\varphi_1 dx\right| - \varepsilon\|f_{n_1}\|_2
\end{aligned}$$

因此，当ε充分小时，

$$\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi dx\right|>1$$

再由1°知，对$\varphi_1(x)$，$r_1=\min(\frac{1}{2},\ \varepsilon)$，$M=2$，存在$\varphi_2(x)$及$n_2>n_1$，满足

$$\|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\|_2\leqslant r_1 \quad \left|\int_a^b f_{n_2}(x)\varphi_2(x)dx\right|>2$$

连续利用1°，得到一数列

$$n_1<n_2<n_3\cdots$$

与L^2中的函数列

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \cdots$$

及一个以0为极限的数列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots\cdots$$

使得

$$\left|\int_a^b f_{n_k}\varphi_k dx\right|>k,\quad \|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)\|_2\leqslant r_k$$

且当$\|\varphi-\varphi_k\|_2\leqslant r_k$时，也有

$$\left|\int_a^b f_{n_k}\varphi dx\right|>k$$

由L^2空间的完备性，存在$\varphi(x)\in L^2$，使

$$\|\tilde{\varphi}-\varphi_k\|_2\leqslant r_k$$

于是

$$\left|\int_a^b f_{n_k}\tilde{\varphi}\,dx\right|>k\qquad k=1,2,3,\ \cdots$$

但从

$$\int_a^b f_n(x)\tilde{\varphi}(x)dx\longrightarrow\int_a^b f(x)\tilde{\varphi}(x)dx$$

知$\left\{\int_a^b f_{n_k}\tilde{\varphi}\,dx\right\}$是有界的，这矛盾说明$\{\|f_n\|_2\}$必有界。

第二步证明$f\in L^2$。

在题设中，令$g(x)=1$，则得$f\in L$，于是$f(x)$在$[a,\ b]$上几乎处处有限可测，令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & x\in E(|f|\leqslant n)\\ n & x\in E(|f|>n)\end{cases}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

则对任意的$g(x)\in L^2$，有

$$|f_n(x)g(x)|\leqslant|f(x)g(x)|$$

而 $\int_a^b |f(x)g(x)|dx<\infty$，　且 $f_n(x)g(x)\xrightarrow{a.e}f(x)g(x)$。
由勒贝格控制收敛定理，得

$$\int_a^b f_n(x)g(x)dx\longrightarrow\int_a^b f(x)g(x)dx$$

即 $f_n(x)\xrightarrow{弱}f(x)$。　由第一步，$\{\|f_n\|_2\}$ 有界，设

$$\int_a^b |f_n(x)|^2dx\leqslant K\quad n=1,2,3,\cdots$$

则由法杜定理，得

$$\int_a^b |f(x)|^2dx\leqslant\varliminf_n\int_a^b |f_n(x)|^2dx\leqslant K$$

证法二　反设 $f(x)\in L^2$，即 $\int_a^b |f(x)|^2dx=+\infty$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & 当|f(x)|\leqslant n时\\ 0 & 当|f(x)|>n时\end{cases}$$

则 $f_n\in L^2$。

在题设中，令 $g(x)=1$ 得 $f\in L$，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有限，于是 $|f_n(x)|^2$ 几乎处处收敛于 $|f(x)|^2$。

又因 $\{|f_n(x)|^2\}$ 为非负单调增序列，由勒维定理，得

$$\lim_n\int_a^b |f_n(x)|^2dx=\int_a^b |f(x)|^2dx=+\infty$$

记 $C_n=\int_a^b |f_n(x)|^2dx$，　则 $C_n\longrightarrow+\infty$，　故不妨设 $C_n>0$。

又令 $g_n(x)=\dfrac{|f_n(x)|}{C_n}$，则 $g_n(x)\geqslant0$，且 $g_n(x)\in L^2$。

因为

$$\int_a^b |f(x)|g_n(x)dx=\frac{1}{C_n}\int_a^b |f(x)|\ |f_n(x)|dx$$

$$=\frac{1}{C_n}\int_a^b |f_n(x)|^2dx=1$$

$$\|g_n\|^2=\int_a^b |g_n(x)|^2dx$$

$$=\frac{1}{C_n^2}\int_a^b |f_n(x)|^2dx=\frac{1}{C_n}\longrightarrow 0$$

所以必存在单调上升的子列$\{n_k\}$，满足

$$\|g_{n_k}\|\leqslant\frac{1}{2^k}\qquad \int_a^b |f(x)|\ g_{n_k}(x)dx=1$$

令 $$h(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_{n_k}(x)\qquad h_m(x)=\sum_{k=1}^{m} g_{n_k}(x)$$

由于

$$\|h_{m+p}-h_m\|\leqslant\sum_{i=m+1}^{m+p}\|h_i\|<\frac{1}{2^m}$$

所以$\{h_m(x)\}$是L^2中的基本列。

由L^2空间的完备性及本章习题2，$h_m(x)$在L^2中平均收敛于$h(x)$，于是存在m_0，使$\|h-h_{m_0}\|<1$，从而

$$\|h\|\leqslant\|h_m\|+1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|g_{n_k}\|+1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+1<+\infty$$

即

$$h(x)\in L^2$$

但另一方面，对任何自然数m，

$$\int_a^b |f(x)h(x)|dx=\int_a^b |f(x)|h(x)dx$$

$$\geqslant\int_a^b |f(x)|h_m(x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int_a^b |f(x)|g_k(x)dx=m\cdot 1=m$$

由m的任意性得

$$\int_a^b |f(x)h(x)|dx=+\infty$$

即在L^2中找到函数$h(x)$，使

$$\int_a^b |f(x)h(x)|dx=+\infty$$

与题设矛盾。故有$f(x)\in L^2$。

15. 设三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$在任一正测度集$E$上收敛，试证 $\lim_{k\to\infty} a_k=0$，$\lim_{k\to\infty} b_k=0$。

证 因为$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx+b_k \sin kx)$在任一正测度集$E$上收敛，所以

$$\lim_{k\to\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=0$$

在E上成立。令

$$r_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

则有θ_k，满足

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=r_k\cos(kx+\theta_k)$$

若a_k，b_k中有一个不收敛于零，即$r_k\to 0(k\to\infty)$不成立，则存在子列$\{k_i\}$及正数σ，满足

$$k_1<k_2<\cdots,\quad r_{k_i}>\sigma$$

且当$x\in E$时，

$$\cos(k_i x+\theta k_i)\to 0 \qquad (i\to\infty)$$

因为 $|\cos^2(k_i x+\theta k_k)|\leqslant 1$，由有界收敛定理，得

$$\lim_{i\to\infty}\int_E \cos^2(k_i x+\theta k_i)dm$$

$$=\int_E \lim_{i\to\infty}\cos^2(k_i x+\theta_i)dm=0$$

但

$$\int_E \cos^2(kx+\theta_k)dm$$

$$=\frac{1}{2}\int_E\left[1+\cos(2kx+2\theta_k)\right]dm$$

$$=\frac{1}{2}mE+\cos 2\theta_k\int_E \cos 2kx dm$$

$$-\sin 2\theta_k\int_E \sin 2kx dm$$

注意到 $\int_E \cos kx dm$，$\int_E \sin kx dm$ 是 E 的特征函数的傅立叶系数，由黎曼—勒贝格引理知

$$\int_E \cos\ 2kx dm\to 0,\qquad \int_E \sin\ 2kx dm\to 0\qquad (k\to\infty)$$

从而得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \cos^2(kx+\theta_k)dm=\frac{1}{2}mE>0$$

得出矛盾。由此可见，当 $k\to\infty$ 时，$a_k\to 0$，$b_k\to 0$。

16. 设 $f, f_n\in L(-\infty,\infty)$，且 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$（在 $L(-\infty,\infty)$ 中），则在 $(-\infty,\infty)$ 上一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(x)=\hat{f}(x)$，问在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中相应的命题是否成立。

证 因为 $|\hat{f}_n(x)-\hat{f}(x)|$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_n(t) - f(t) \right] e^{-itx} dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| dt$$

由$f_n \xrightarrow{\text{强}} f$知，$\hat{f}_n(x)$一致趋于$f^{\wedge}(x)$.

在$L^2(-\infty,\infty)$中，相应的命题不成立。例如，令

$$f_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n}}{x}, \qquad f(x) = 0$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即$f_n \xrightarrow{\text{强}} f$。另一方面，对任何$n$,

$$\hat{f}_n(t) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} e^{-itx} dx$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}} \frac{\sin u}{u} e^{-inut} du$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}} \frac{\sin u \cos nut}{u} du$$

$$=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}}\frac{\sin(1+nt)u+\sin(1-nt)u}{u}du$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2} & |nt|<1\\ 0 & |nt|>1\\ \frac{1}{4} & |nt|=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2} & |t|<\frac{1}{n}\\ 0 & |t|>\frac{1}{n}\\ \frac{1}{4} & |t|=\frac{1}{n}\end{cases}$$

而 $$f^\wedge(t)=0$$

可见 $f_n^\wedge(t)\xrightarrow{a.e}f^\wedge(t)$，但$f_n^\wedge(t)$并非一致收敛于$f^\wedge(t)$。

17 设$f\in L_{2\pi}$，而g有界且有周期2π，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(nx)dm=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dm\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dm$$

证 设 $|g(x)|\leqslant M$，$\left|\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dm\right|=K$。

(i)设$f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上连续，则$f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上R可积，于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(nx)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{-\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(x)g(nx)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} f(t-\pi+\frac{2k+1}{n}\pi)g(nt-n\pi+(2k+1)\pi)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi-n\pi}^{\pi-n\pi} \frac{1}{n}f\left(\frac{u}{n}+\frac{2k+1}{n}\pi\right)g(u+\pi)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{u}{n}+\frac{2k+1}{n}\pi\right)g(u+\pi)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)g(u+\pi)du$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\frac{u}{n}+\frac{2k+1}{n}\pi)\right.$$

$$\left.-f(\frac{2k+1}{n}\pi)\right]g(u+\pi)du$$

$$=I_1+I_2$$

因为 $$|f(x)g(nx)|\leqslant M|f(x)|$$

而$|f(x)|$在$[-\pi, \pi]$上可积，由勒贝格控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) g(u+\pi)du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)dt\right) g(u+\pi)du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$$

由$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上的一致连续性，任给$\varepsilon>0$，当n充分大时，有

$$\left| f\left(\frac{u}{n}+\frac{2k+1}{n}\pi\right) - f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right| < \varepsilon$$

对$[-\pi, \pi]$上的任何u及任何$k=0,1,2,\cdots,n-1$都成立，从而当n充分大时，

$$|I_2| \leqslant M\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon du = 2M\pi\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = 0$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dm$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dm$$

（ii）设$f\in L_{2\pi}$，则对任何$\varepsilon>0$，由参考文献[1]第四章定理2.8知，存在$[-\pi,\ \pi]$上的连续函数$h(x)$，使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-h(x)|dm<\varepsilon$$

由（i）知，存在N，使当$n>N$时，有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)g(nx)dm\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dm\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dm\right|<\varepsilon$$

于是当$n>N$时，

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(nx)dm-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dm\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dm\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(nx)dm-\int_{-\pi}^{\pi}h(x)g(nx)dm\right|$$

$$+\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)g(nx)dm\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dm\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dm\right|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dm\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dm\right.$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dm \Big|$$

$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-h(x)|dm+\varepsilon$$

$$+\frac{k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)-f(x)|dm$$

$$<\left(M+\frac{k}{2\pi}+1\right)\varepsilon$$

此即证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dm=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dm\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dm$$

18. 设$f\in L^2(-\infty,\infty)$，令$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$，

试证几乎处处成立：

$$f_h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{\wedge}(t)\frac{\sin ht}{ht}e^{itx}dt$$

证 令 $g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2h} & |t|\leqslant h\\ 0 & |t|>h\end{cases}$

则 $g(t)\in L^2(-\infty,\infty)$， 且

$$g^{\wedge}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin ht}{ht}$$

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt=\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}f(x-u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(u)f(x-u)du=(g*f)(x)$$

由参考文献[1]第五章定理3.6，得

$$f_h(x)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}g^\wedge(u)f^\wedge(u)e^{ixu}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f^\wedge(u)\frac{\sin hu}{hu}e^{ixu}du$$

19. 设$f(x)$是有界连续函数，令

$$L_\sigma(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\frac{2t}{\sigma})\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$$

证明在任何闭区间$[\alpha,\beta]$上，$L_\sigma(f,x)$一致收敛于$f(x)$。

证 由参考文献[1]第五章§3例3知

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=1$$

所以

$$L_\sigma(f,x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+\frac{2t}{\sigma})-f(x)]\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$$

设$|f(x)|\leqslant M$，则对任何$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使

$$\int_{|t|>N}\frac{dt}{t^2}<\frac{\pi\varepsilon}{4M}$$

于是

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|>N}[f(x+\frac{2t}{\sigma})-f(x)]\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{|t|>N} 2M\frac{dt}{t^2} < \frac{\pi\varepsilon}{4M}\cdot\frac{2M}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2}$$

当$|t|\leqslant N$时，因$f(x)$在任何有限区间上都一致连续，所以存在$\Sigma>0$，使当$\sigma>\Sigma$时，$\frac{2t}{\sigma}$充分小，而使

$$\left| f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right| < \frac{\pi\varepsilon}{4N}$$

对$|t|\leqslant N$，$x\in[\alpha,\ \beta]$一致成立。因此

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{\pi\varepsilon}{2N}dt<\varepsilon/2$$

这样

$$|L_\sigma(f,x)-f(x)|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_{-N}^{N}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}dt\right|$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_{|t|>N}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}dt\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

对$x\in[\alpha,\ \beta]$一致成立，即$L_\sigma(f,\ x)$一致收敛于$f(x)$。

20. 设$f\in L(-\infty,\ \infty)$，且$f^\wedge=0$，则$f\sim0$。

证 (i)首先证明，当$f\in L(-\infty,\ \infty)$时，对$(-\infty,\infty)$上几乎所有的u有

$$\int_0^h |f(u+x)-f(u)|dx=o(h)\quad (h\to 0)$$

成立。这样的点u称为$f(x)$的勒贝格点。

设$[a,\ b]$为任一有限区间，r为一有理数，则$f(x)-r$在$[a,\ b]$上可积，由参考文献[1]第四章引理6.4，对几乎所有的$u\in[a,\ b]$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+u)-r|dx$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_u^{u+h}|f(x)-r|dx=|f(u)-r|\qquad (*)$$

设$E(r)$是$[a,b]$中不满足$(*)$的点u的全体，则$mE(r)=0$又设$\{r_n\}$是有理点的全体，令

$$E=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E(r_n)\right)\cup E(|f|=\infty)$$

则$mE=0$。

设$u_0\in[a,\ b]-E$，任取$\varepsilon>0$，并取有理数r_n，满足

$$|f(u_0)-r_n|<\frac{\varepsilon}{3}$$

则

$$\Big||f(u_0+x)-r_n|-|f(u_0+x)-f(u_0)|\Big|<\frac{\varepsilon}{3}$$

因此

$$\Big|\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-r_n|dx$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-f(u_0)|dx\Big|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

因为$u_0\overline{\in}E$，所以存在$\delta(\varepsilon)>0$，当$|h|<\delta$时，

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h |f(u_0+x)-r_n|dx - |f(u_0)-r_n| \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

所以

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(u_0+x)-r_n|\,dx < \frac{2}{3}\varepsilon$$

于是

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(u_0+x)-f(u_0)|\,dx < \varepsilon$$

即

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(u_0+x)-f(u_0)|\,dx = 0$$

所以，$[a,\ b]$中的几乎所有的点都为$f(x)$的勒贝格点。因$[a,\ b]$是任一有限区间，可见$(-\infty,\ \infty)$中几乎所有的点都为$f(x)$的勒贝格点。

(ii) 再证明，若$f\in L(-\infty,\ \infty)$，u为$f(x)$的勒贝格点时，有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)e^{iux}f^{\wedge}(x)dx = f(u)$$

事实上，对任何$R>0$，$u\in(-\infty,\ \infty)$，令

$$S_R(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{R}^{R}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)e^{iux}f^{\wedge}(x)dx$$

将$f^{\wedge}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(t)dt$代入$S_R(u)$中，并利用Fubini定理，得

$$S_R(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)e^{ix(u-t)}dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u-t) \frac{1-\cos Rt}{Rt^2} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(u+t)+f(u-t)] \frac{1-\cos Rt}{Rt^2} dt$$

由于

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos Rt}{Rt^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

所以

$$S_R(u)-f(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(u+t)+f(u-t)$$

$$-2f(u)] \frac{1-\cos Rt}{t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} = I_1 + I_2$$

令

$$\varphi(t) = |f(u+t)+f(u-t)-2f(u)|$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(y) dy$$

则对于给定的δ，当$\frac{1}{R}<\delta$时，

$$|\pi I_1| \leqslant \int_0^{\delta} |f(u+t)+f(u-t)$$

$$-2f(u)| \frac{1-\cos Rt}{Rt^2} dt = \int_0^{\frac{1}{R}} + \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} = I_1' + I_2''$$

因为u是$f(x)$的勒贝格点，所以$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\Phi(t)}{t}=0$，对于给定的$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，当$0\leqslant t\leqslant\delta$时，$\Phi(t)\leqslant\varepsilon t$。

因为$1-\cos\theta\leqslant\frac{\theta^2}{2}$，所以

$$I_1'\leqslant\frac{R}{2}\int_0^{\frac{1}{R}}\varphi(t)dt=\frac{R}{2}\Phi\left(\frac{1}{R}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

又因为$1-\cos\theta<2$，所以

$$I_1''\leqslant 2\int_{\frac{1}{R}}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{Rt^2}dt=\frac{2\Phi(\delta)}{R\delta^2}-2R\Phi\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$+4\int_{\frac{1}{R}}^{\delta}\frac{\Phi(t)}{Rt^3}dt\leqslant\frac{2\varepsilon}{R\delta}+4\varepsilon\int_{\frac{1}{R}}^{\delta}\frac{dt}{Rt^2}\leqslant 2\varepsilon+4\varepsilon=6\varepsilon$$

因 $|I_2|\leqslant\frac{2}{\pi R}\int_\delta^\infty\frac{\varphi(t)}{t^2}dt$，而$\int_\delta^\infty\frac{\varphi(t)}{t^2}dt<\infty$，故存在$R_0$，当$R>R_0$时，$|I_2|<\varepsilon$，于是

$$|S_R(u)-f(u)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}+\frac{6\varepsilon}{\pi}+\varepsilon$$

即证得

$$\lim_{R\to\infty}S_R(u)=f(u)$$

(iii) 最后证$f\sim 0$。

因为$f^{\wedge}=0$，由(ii)，当u为f的勒贝格点时，有$f(u)=0$，又由(i)，对$(-\infty,\infty)$上的几乎所有的u，$f(u)=0$，即

$$f\sim 0$$

21. 若$mE<\infty$，$p>0$，证明$L^p(E)\supset L^{\infty}(E)$；若$p_i\to\infty(p_i>1)$，问 $L^{\infty}(E)\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}L^{p_i}(E)$是否成立。

答： $L^{\infty}(E)\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}L^{p_i}(E)$不成立。

22. 设$f(x)\in L^p(-\infty,\infty)$，$1\leqslant p<\infty$，而$g(x)\in L^q(-\infty,\infty)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

(i) $(f*g)(x)$在$(-\infty,\infty)$上处处连续，且有

$$|(f*g)(x)|\leqslant\|f\|_p\ \|g\|_q \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

(ii) 若$1<p<\infty$，则有$\lim\limits_{|x|\to\infty}(f*g)(x)=0$。

提示 首先证明，$f\in L^p(-\infty,\infty)(p\geqslant1)$具有平均连续性

$$\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p dx=0$$

再利用Hölder不等式及平均连续性证得(i)。

23. 设周期为2π的函数族$\{g_n(x)\}$满足

(i) $\int_{-\pi}^{\pi}g_n(x)dx=2\pi$；

(ii) 存在$M>0$，使对一切n，有$\int_{-\pi}^{\pi}|g_n(x)|dx\leqslant M$；

(iii) 对任何$0<\delta<\pi$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi}|g_n(x)|dx=0$

对于周期为2π的函数，令

$$I_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g_n(u)du$$

则对每个以2π为周期且在$[-\pi,\ \pi]$上可积的函数$S(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[I_n(f,x)-f(x)]S(x)dx=0$$

提示 利用Fubini定理，得

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}[I_n(f,x)-f(x)]S(x)dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|u|\leqslant\delta}|g_n(u)|\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[S(x+u)-S(x)]dx\right|du$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|u|\leqslant\pi}|g_n(u)|\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[S(x+u)\right.$$

$$\left.-S(x)]dx\right|du$$

对于不等式右边的第一项，利用$S(x)$的平均连续性知其可以小于任意小，对于其第二项，根据$g_n(x)$满足的性质(iii)知其可以小于任意小。

第四章　距离空间和赋范线性空间

一、基本概念和主要定理

距离和距离空间　设X是任一非空集合，$P(x, y)$是$X\times X\to R$的函数，如果满足

（i）非负性：$\rho(x, y)\geqslant 0$；$\rho(x, y)=0$的充要条件是$x=y$；

（ii）对称性：$\rho(x, y)=\rho(y, x)$

（iii）三点不等式：$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(y, z)$

则称$\rho(x, y)$为x和y之间的距离，(X, ρ)为以ρ为距离的距离空间。

完备性　设$\{x_n\}\subset(X, \rho)$，如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在N，使得当$n, m>N$时有$\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为$(X, \rho)$中的基本序列（柯西序列），如果距离空间$(X, \rho)$中任一基本序列均收敛于$X$中一点，则称$(X, \rho)$为**完备距离空间**。

可分性　若(X,ρ)中存在可列稠密子集，则称(X, ρ)为可分距离空间；设$A\subset(X, \rho)$，若A中存在可列稠密子集，则称A可分。

列紧集　设无穷集$A\subset(X, \rho)$，如果A的任一无穷点列必含有一个收敛点列，则称A为列紧集；一个列紧闭集称作自列紧集。

全有界　设 A，$B\subset(X,\rho)$，给定 $\varepsilon>0$，若 $\bigcup\limits_{x\in B}S(x,\varepsilon)\supset A$，则称 B 是 A 的一个 ε 网（这里 $S(x,\varepsilon)=\{y\in X:\rho(y,x)<\varepsilon\}$）；如果对任意的 $\varepsilon>0$，A 总存在有穷的 ε 网 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则称集合 A 全有界。

紧集　设 $A\subset(X,\rho)$，如果从 A 的任一开复盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 中可取出有穷多个开集复盖 A，则称 A 为紧集；若 (X,ρ) 本身是紧的，则称 (X,ρ) 为紧空间。$A\subset(X,\rho)$ 为紧集的充要条件是 A 为自列紧集。

设 A，$B\subset(X,\rho)$，数

$$\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)$$

叫做点 x 到集 A 的距离；数

$$\rho(A,B)=\inf_{x\in A,\ y\in B}\rho(x,y)$$

叫做集 A 与 B 间的距离；数

$$\rho_H(A,B)=\sup_{x\in A,\ y\in B}\{\rho(x,B),\ \rho(y,A)\}$$

叫做集 A 与 B 间的豪斯道夫距离。

范数和赋范线性空间　设 X 是实（或复）线性空间，$P(x)$ 是 $X\to R$ 的函数，如果

（i）　$P(x)\geqslant 0$，且 $P(x)=0$ 的充要条件是 $x=0$；

（ii）　$P(\alpha x)=\|\alpha\|P(x)$（其中 α 属于数域 K）；

（iii）　$P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$

则称 $P(x)$ 为 x 的范数，常记 $P(x)=\|x\|$，并称（X，$\|.\|$）为赋范线性空间。对赋范线性空间（X，$\|.\|$），我们令 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，则（X，ρ）便成为一个距离空间，如

果X按$\rho(x, y)=\|x-y\|$是完备的，则称$(X, \|.\|)$为Banach空间。

直接和 设X为赋范线性空间，X_1，X_2为X的子空间，如果对任一$x\in X$，有唯一表示式

$$x=x_1+x_2$$

其中$x_1\in X_1$，$x_2\in X_2$，则记$X=X_1\dot{+}X_2$，称X为子空间X_1和X_2的**直接和**。

积空间 设X_1，X_2为赋范线性空间，令

$$X_1\times X_2=\{(x, y)\mid x\in X_1,\ y\in X_2\}$$

$$\|(x, y)\|=\|x\|+\|y\|$$

则称$X_1\times X_2$为X_1和X_2的积空间。易知如果X_1，X_2完备，则$X_1\times X_2$也是Banach空间，且$X_1\times X_2$与$X_1\dot{+}X_2$代数同构。

商空间 设F为赋范线性空间X的一个闭子空间，令
$X/F=\{\dot{x}\mid \dot{x}$ 代表一个等价类，x_1，$x_2\in\dot{x}\Leftrightarrow x_1-x_2\in F\}$
我们称X/F为商空间。如果规定X/F中元素的范数为

$$\|\dot{x}\|=\inf_{x\in\dot{x}}\|x\|$$

则当X完备时，X/F也完备。

Hamel基和Schauder基 设X为线性空间，$B\subset X$，如果X中任一元素x均可唯一地表成B中有限个元素的线性组合，则称子集B为X的Hamel基，设赋范线性空间$(X,\|.\|)$中存在一可列集$\{e_n\}$，使得对任一$x\in X$，有$x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$（级数在$(X, \|.\|)$中收敛），且表示唯一，则称$\{e_n\}$为$(X, \|.\|)$的Schauder基。

同胚映射和等距映射 如果映射T是$(X, \rho) \to (X_1, \rho_1)$上的一对一映射，且映射$T$以及逆映射$T^{-1}$都连续，则称$T$为$X$到$X_1$上的同胚映射，称$(X, \rho)$与$(X_1, \rho_1)$同胚；如果存在$(X, \rho)$到$(X_1, \rho_1)$上的映射$T$，使对一切$x, y \in X$，有

$$\rho_1(Tx, Ty) = \rho(x, y)$$

则称T为X到X_1上的等距映射，称X和X_1等距。

定理1（完备化定理） 对任一距离空间(X, ρ)，都存在完备化空间，而且任何两个完备化空间都等距。即存在一个完备距离空间X_0，使X等距于X_0的一个稠密子空间X_0'，且除去"等距不计外"，X_0是唯一的。

定理2 设(X, ρ)完备，$A \subset (X, \rho)$，则A列紧等价A全有界，也等价于对任给的$\varepsilon > 0$，A存在列紧的ε网。

定理3（Arzela-Ascoli） 集合$A \subset C[a, b]$列紧的充要条件是下列两条件成立：

（i） 集合A一致有界，即存在常数K，使对一切$x(t) \in A$，有$|x(t)| \leqslant K$；

（ii） 集合A是等度连续的，即对任给的$\varepsilon > 0$，存在$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得任何$x(t) \in A$以及任意的$t_1, t_2 \in [a, b]$，只要$|t_1 - t_2| < \delta$，就有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

设T为$(X, \rho) \to (X, \rho)$的映射，如果存在$0 < \theta < 1$，使得对一切$x, y \in X$，有

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \theta \rho(x, y)$$

则称T为X上的压缩映射。

定理4（压缩映射原理） 完备距离空间（X, ρ）中的压缩映射T有唯一的不动点，且对任何$x_0 \in X$，序列$x_n = Tx_{n-1}$（$n=1, 2, \cdots$）收敛于T的不动点。

黎斯引理 设$X_0 \subset (X, \|\cdot\|)$是真闭子空间，则对任给的$0<\varepsilon<1$，存在$x_0 \in X$，$\|x_0\|=1$，使

$$\rho(x_0, X_0) \geqslant 1-\varepsilon$$

定理5 X为有穷维赋范线性空间的充要条件是X的任一有界子集A是列紧集。

二、例题、习题与解法

1. 设R^n是n维矢量组成的集，在R^n中定义距离如下：

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \eta_k|$$

其中 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

则R^n按距离ρ_1是距离空间。

解 ρ_1显然满足距离公理三个条件，故R^n按ρ_1是距离空间。

2. 设X为距离空间，$A \subset X$，证明A的一切内点组成的集必为开集。

证 设$B=\{x \in A: x为A的内点\}$，任取$x \in B$，因为x是A的内点，故必存在$\delta>0$，使开球$S(x, \delta) \subset A$，现证明$S(x, \delta) \subset B$。事实上对于$S(x, \delta)$中任一点y，令

$$\delta_1 = \delta - \rho(x, y) > 0$$

则

$$S(y, \delta_1) \subset S(x, \delta) \subset A$$

故y是A的内点，也就是说$S(x, \delta) \subset B$，从而B为开集。

3. 设X为距离空间，$A\subset X$，令

$$f(x)=\inf_{y\in A}\rho(x,\ y)\qquad (x\in X)$$

求证$f(x)$是连续函数。

证 任取x，$x_0\in X$，则由

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ x_0)+\rho(x_0,\ y)$$

可得

$$\inf_{y\in A}\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x_0,\ y)\ (1)$$

同理可得

$$\inf_{y\in A}\rho(x_0,\ y)\leqslant\rho(x,\ x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x,\ y)\ (2)$$

由(1)，(2)立即得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\rho(x,\ x_0)$$

故$f(x)$为连续函数。

4. 证明：

(i) 距离空间中的闭集必为可列个开集的交。

(ii) 距离空间中的开集必为可列个闭集的并。

证 (i) 设F为距离空间$(X,\ \rho)$中任一闭集，我们令

$$G_n=\{x\in X:\ \rho(x,\ F)<\frac{1}{n}\}$$

则容易证明每个G_n为开集，且

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

(ii) 对于X中任一开集G，令$F=\mathscr{C}G$，则由(i)可知存在开集G_n，使$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，从而

$$G=\mathscr{C}F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n$$

其中$\mathscr{C}G_n$为X的闭集。

5. 设X是可分的距离空间，$\{G_c\}$（$c\in J$）为X的一个覆盖，则从$\{G_c\}$中可取出可列个集组成X的一个覆盖。

本题可参阅参考文献[2]定理2.4（$p38$—$p39$）必要性的证明。

6. 设X为距离空间，F_1，F_2为X中的两个不相交的闭集，则存在定义在X上的连续函数$f(x)$，使当$x\in F_1$时，$f(x)=0$，当$x\in F_2$时，$f(x)=1$。

证 我们记$\rho(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$，并且令

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}$$

则据本章第3题知$f(x)$是X上的连续函数，且

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in F_1\\ 1 & x\in F_2\end{cases}$$

7. 设X为距离空间，F_1，F_2为X中不相交的闭集，证明存在开集G_1,G_2，使得$G_1\cap G_2=\phi$；$G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$。

证法一 利用第6题，令

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}$$

则$f(x)$连续，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，且

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in F_1\\ 1 & x\in F_2\end{cases}$$

再令

$$G_1=\{x\in X:\ f(x)<\tfrac{1}{2}\}$$
$$G_2=\{x\in X:\ f(x)>\tfrac{1}{2}\}$$

则据参考文献[2]定理1.5（$p15$）知G_1，G_2均为开集，且显然有$G_1\cap G_2=\phi$；$G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$。

证法二 任取$x\in F_1$，则$d(x)=\rho(x,\ F_2)>0$，作开球$S(x,\ \tfrac{1}{2}d(x))$，令

$$G_1=\bigcup_{x\in F_1}S(x,\tfrac{1}{2}d(x))$$

同理$y\in F_2$，有$d(y)=\rho(y,F_1)>0$，令

$$G_2=\bigcup_{y\in F_2}S(y,\ \tfrac{1}{2}d(y))$$

则G_1，G_2均为开集，且$G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$。我们证明$G_1\cap G_2=\phi$。设不然，存在一点$a\in G_1\cap G_2$，则必存在$x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，使

$$a\in S(x_0,\tfrac{1}{2}d(x_0))\cap S(y_0,\tfrac{1}{2}d(y_0))$$

不妨设$d(x_0)\geqslant d(y_0)$，则

$$d(x_0)=\rho(x_0,F_2)\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,a)+\rho(a,y_0)$$
$$<\tfrac{1}{2}d(x_0)+\tfrac{1}{2}d(y_0)\leqslant d(x_0)$$

矛盾，故$G_1\cap G_2=\phi$。

8. 设$f(X)$是由距离空间X到距离空间X_1中的连续映射，A在X中稠密，证明$f(A)$在$f(X)$中稠密。

证 任取$z\in f(X)$，则存在$x\in X$，使$z=f(x)$，因为$\overline{A}=X$，故存在$x_n\in A$，使$x_n\xrightarrow[X]{}x$，再据$f(x)$的连续性得，

$$f(x_n)\xrightarrow[X_1]{}f(x),\qquad 所以\quad \overline{f(A)}=f(X)。$$

9. 求证l^p是一个完备的、可分的距离空间。其中

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{1/p} \quad (p\geqslant 1)$$

证 $\rho(x, y)$是一个距离显然。

（i）完备性：

设$\{x_n\}\subset l^p$为基本列，其中$x_n=(\xi_i^{(n)})$，则对任给$\varepsilon>0$，存在N，当$n, m\geqslant N$时，有

$$\rho(x_n, x_m)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \quad (1)$$

则当$n, m\geqslant N$时，有

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon \quad (i=1,2,3,\cdots) \qquad (2)$$

故对每个i，$\xi_i^{(n)}$收敛。现设$\xi_i=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$，$x=(\xi_i)$，

下面证明$x\in l^p$，且$x_n\xrightarrow{l^p}x$。

首先由（1）知对任意的自然数k都有

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p<\varepsilon^p \qquad (n, m\geqslant N)$$

固定$n\geqslant N$，让$m\to\infty$，得

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (n\geqslant N)$$

再令$k\to\infty$，得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (n\geqslant N)$$

故$x\in l^p$，$x_n\xrightarrow{l^p}x$，完备性得证。

(ii) 可分性：

令 $E_0=\{x: x=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)$，其中 n 为任一自然数，r_i 均为有理数$\}$（这儿不妨设 l^p 为实空间），则 E_0 为 l^p 的一个可数子集。下面证明 E_0 在 l^p 中稠。

任取 $x\in l^p$，$\varepsilon>0$，首先存在 n，使

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

对于 ξ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 必存在 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，使

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-r_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

故存在点 $x_0=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ 0,\ 0,\ \cdots)\in E_0$，使

$$\rho(x,\ x_0)<\varepsilon$$

l^p 可分得证。

10. 证明多项式全体在 $C^k[a,\ b]$ 中稠密，其中 $C^k[a,b]$ 表示 $[a,\ b]$ 上 k 次连续可微函数的全体，距离定义为

$$\rho(x,\ y)=\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)-y^{(j)}(t)|$$

证 任取 $x(t)\in C^k[a,\ b]$，$\varepsilon>0$，因为 $x^{(k)}(t)\ni C[a,\ b]$，则存在多项式 $P(t)$，使

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(k)}(t)-P(t)|<\frac{\varepsilon}{(k+1)A^k}$$

此处 $A=\max\{1,\ b-a\}$，我们令

$$P_1(t)=\int_a^t P(u)du+x^{(k-1)}(a),\ \cdots\cdots$$

一般地

$$P_j(t)=\int_a^t P_{j-1}(u)du+x^{(k-j)}(a)$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ P_0(t)=P(t))$$

显然有

$$x^{(j-1)}(t)=\int_a^t x^{(j)}(u)du+x^{(j-1)}(a)$$

$$(j=1,\ 2,\cdots,k)$$

$$P_k^{(j)}(t)=P_{k-j}(t)\qquad(j=1,\ 2,\cdots,k)$$

则$P_k(t)$是一个多项式，且满足

$$\rho(P_k(t),\ x(t))<\varepsilon$$

从而多项式全体在$C^k[a,\ b]$中稠密。

［注］本题还可用其它方法证明。

11. 设X为距离空间，$A\subset X$，如果A按照X的距离是完备的距离空间，证明A是闭集。

证 任取$x\in\overline{A}$，则存在$x_n\in A$，使$x_n\to x$。由于收敛点列$\{x_n\}$必是A中基本列，A是完备距离空间，则$\{x_n\}$必在A中收敛，但极限元是唯一的，故$x\in A$，A是闭集。

12. 证明基本列是有界的。

本题证明留给读者。

13. 设X是完备的距离空间，$\{F_n\}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）为X中一列闭集：

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$$

并且$F_n\neq\phi$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$（$d(F_n)$表$F_n$的直径，即$F_n$中任两点的距离的上确界），则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\phi$。

证 不妨设$F_1\supsetneqq F_2\supsetneqq F_3\supsetneqq\cdots\cdots$，则可取$x_n\in F_n-F_{n+1}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）得$X$中一点列$\{x_n\}$，因为当$n>m$时，有$x_n$，$x_m\in F_m$，所以$n>m$时

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant d(F_m)$$

据条件$d(F_m) \to 0$，立即知$\{x_n\}$是X中基本列，由于X是完备的，则存在$x \in X$，使$x_n \to x$。下面证明$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.事实上对任一自然数$m$，当$n > m$时，$x_n \in F_m$，$F_m$为闭集，故$x \in F_m$，从而$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$。

14. 举例说明全有界集不一定是列紧的。

解 取$X = (0, 1)$，X中距离$\rho(x, y) = |x - y|$，则$A = (0, \frac{1}{2}) \subset X$必全有界，但非列紧。

15. 设$\{F_n\}$($n = 1, 2, 3, \cdots$)是紧空间中的一列闭集：

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$$

并且$F_n \neq \phi$，则$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

证 设$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{C} F_n = X$，$\{G_n\} = \{\mathscr{C} F_n\}$是$X$的一个覆盖，由$X$的紧性知存在$N$，使

$$\bigcup_{i=1}^{N} G_i = X$$

又因为$G_n \subset G_{n+1}$，所以$G_N = X$，这就推出$F_N = \phi$，矛盾，故$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

[注] 亦可取$x_n \in F_n - F_{n+1}$，然后证明$\{x_n\}$的一个聚点属于$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$。

16. 证明紧集的闭子集也是紧的。

证法一 设A为紧集，$B\subset A$为闭集，因为A是紧集$\Leftrightarrow$A自列紧，从而B是列紧闭集，故B为自列紧的，即B为紧集。

证法二 设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$为$B$的任一开复盖，$X-B$是开集，则$\{G_\alpha\}\cup\{X-B\}$为$A$的一个开复盖，$A$紧，则从这一开复盖中可取出有穷个开复盖$A$，不妨设$\left(\bigcup_{\alpha=1}^{n}G_\alpha\right)$

$\cup(X-B)\supset A$，于是$\bigcup_{\alpha=1}^{n}G_\alpha\supset B$，故$B$为紧集。

17. 证明如果F_1，F_2是距离空间X中的紧集，则必存在$x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，使

$$\rho(F_1,\ F_2)=\rho(x_0,\ y_0)$$

其中$\rho(F_1,\ F_2)=\inf\limits_{\substack{x\in F_1\\ y\in F_2}}\rho(x,\ y)$。

证 据inf的定义，必存在$x_n\in F_1$，$y_n\in F_2$，使

$$\rho(F_1,\ F_2)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)$$

因为F_1，F_2为X中紧集，必存在子序列$\{n_k\}$使$x_{n_k}\to x_0\in F_1$，$y_{n_k}\to y_0\in F_2$，再据$\rho(x,\ y)$的连续性，即得

$$\rho(F_1,\ F_2)=\rho(x_0,\ y_0)$$

18. 证明定义在紧空间上的连续函数必是有界的，而且达到它的上、下确界。

证 设X为紧空间，$f(x)$为定义在X上的连续函数，我们证明$f(x)$是紧集。因为X为紧空间，必自列紧，任取$y_n=f(x_n)\in f(X)$，存在$x_{n_k}\to x_0\in X$，利用$f(x)$的连续性可得

$$y_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}f(x_0)\in f(X)$$

故$f(X)$为自列紧的，即$f(X)$为紧集，从而$f(X)$是R^1中有

界集。

现设 $M=\sup\limits_{x\in X} f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in X} f(x)$，则存在 $x_n\in X$，$y_n\in X$，使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M,\ \lim_{n\to\infty} f(y_n)=m$$

利用X的紧性，存在

$$x_{n_k}\longrightarrow x_0\in X,\ y_{n_k}\longrightarrow y_0\in X$$

易知$M=f(x_0)$，$m=f(y_0)$。

19. 证明定义在紧空间上的连续函数必是一致连续的（一致连续的定义与数学分析中的相同）。

证 设X为紧空间，$f(x)$定义在X上连续，任取$\varepsilon>0$，对每一个$x\in X$，存在$\delta_x>0$，使得当$y\in S(x,\delta_x)$时有

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\bigcup\limits_{x\in X} S(x,\delta_x)=X$，因为$X$紧，必存在有限个点$x_1$，$x_2$，…，$x_{n_0}$，使

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} S(x_i,\frac{\delta x_i}{2})=X$$

现取$\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n_0}\dfrac{\delta_{x_i}}{2}$，则当$\rho(x',x'')<\delta$时（不妨设$x''\in S(x_{i_0},\dfrac{\delta x_{i_0}}{2})$），有

$$\rho(x',x_{i_0})\leqslant\rho(x',x'')+\rho(x'',x_{i_0})\leqslant\delta x_{i_0}$$

故
$$|f(x'')-f(x')|\leqslant|f(x')-f(x_{i_0})|+|f(x_{i_0})-f(x'')|<\varepsilon$$

所以$f(x)$是一致连续的。

20. 证明l^p中的子集A列紧的充要条件是

（i）存在$K>0$，使得对一切$x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}\in A$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<K$$

（ii）对任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得当$m>N$时，对一切$x\in A$有

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^P \quad \varepsilon$$

+ l^p完备

证法一 必要性。设A列紧，则A全有界，条件（i）显然成立。下证条件（ii）。任给$\varepsilon>0$，因为A全有界，必存在有穷的$\frac{1}{2}\varepsilon^{1/P}$-网$\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$，对于$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{n_0}$，存在$N$，使得当$m>N$时有

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}\left|\xi_n^{(i)}\right|^p\right\}^{1/p}<\varepsilon^{1/P}/2$$

（对于$i=1, 2, \cdots, n_0$一致成立）

现任取$x\in A$，首先存在x_i（$1\leqslant i\leqslant n_0$）使

$$\rho(x, x_i)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\xi_n-\xi_n^{(i)}\right|^P\right\}^{1/P}<\varepsilon^{1/P}/2$$

则

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^P\right\}^{1/P}\leqslant\left\{\sum_{n=m}^{\infty}\left|\xi_n-\xi_n^{(i)}\right|^P\right\}^{1/P}$$

$$+\left\{\sum_{n=m}^{\infty}\left|\xi_n^{(i)}\right|^P\right\}^{1/P}<\varepsilon^{1/P}/2+\varepsilon^{1/P}/2=\varepsilon^{1/P}$$

故条件(ii)成立。

充分性。因为l^p完备，据参考文献［2］定理2.1推论（p30），只需证明对任给的$\varepsilon>0$，A存在列紧的ε-网。

任给$\varepsilon>0$，由条件（ii），存在N，当$m\ \ N$时有

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^p<\varepsilon^p \qquad （对一切x=(\xi_n)\in A成立）$$

我们令

$$B=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N,0,\cdots\}|(\xi_n)\in A\}$$

则B是A的一个ε-网。现证B列紧，事实上，据条件（i）对一切$(\xi_n)\in A$成立

$$|\xi_n|\ \ K^{1/p} \qquad (\forall n)$$

故对一切$(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\xi_N,\ 0,\ \cdots)\in B$也有

$$|\xi_n|\leqslant K^{1/p} \qquad (n=1,2,\cdots,N)$$

则存在$\xi_n^{(i)}\xrightarrow[i\to\infty]{}\xi_n^{(0)}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,N)$，记

$$x_i=(\xi_1^{(i)},\ \xi_2^{(i)},\ \cdots,\ \xi_N^{(i)},\ 0,\ \cdots)$$

$$x_0=(\xi_1^{(0)},\ \xi_2^{(0)},\ \cdots,\ \xi_N^{(0)},\ 0,\ \cdots)$$

则$x_0\in l^p$，且$\rho(x_i,\ x_0)\longrightarrow 0\ (i\to\infty)$，从而$B$是列紧的。

证法二 必要性。只要证明条件（ii）成立，用反证法。设存在$\varepsilon_0>0$，对一切自然数m，存在$x_m\in A$使

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(m)}|^p\geqslant\varepsilon_0 \qquad (1)$$

因为A列紧，必可从$\{x_m\}$中取出一收敛子序列，不妨设$x_m\xrightarrow[m\to\infty]{}x\in l^p$，记$x=(\xi_n)$，则存在$N$，当$m>N$时有

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^P\right\}^{1/P}<\frac{1}{2}\varepsilon_0{}^{1/P}$$

以及

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(m)}-\xi_n|^P\right\}^{1/P}<\frac{1}{2}\varepsilon_0{}^{1/P}$$

故当m N时有

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(m)}|^P\right\}^{1/P}<\varepsilon_0{}^{1/P}$$

这与（1）式矛盾，因此条件（ii）成立。

充分性。任取 A 中一无穷点列（$\xi_n^{(k)}$），直接证明存在收敛子序列。首先据条件（i）得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(k)}|^P<K \quad (\forall k\text{成立}) \qquad (2)$$

据条件（ii）知，$\forall\varepsilon>0$，存在N，当$m>N$时对一切k成立

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(k)}|^P<\varepsilon \qquad (3)$$

由（2）知对每一个n，$\xi_n^{(k)}$关于k是一个有界数列，故可按对角线手续取出一子序列$\{n_k\}$，使

$$\xi_n^{(n_k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\xi_n \qquad (\forall n)$$

令$x=(\xi_n)$，$x_{n_k}=(\xi_n^{(n_k)})$，我们证明$x\in l^P$，且$x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{l^P}x$。事实上，由（2）对一切$N$成立$\sum_{n=1}^{N}\left|\xi_n^{(n_k)}\right|^P\leqslant K$，令$k\to\infty$，便得$\sum_{n=1}^{N}|\xi_n|^P\leqslant K$，故$x\in l^P$。又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n\right|^p=\sum_{n=1}^{N}\left|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n\right|^p$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n\right|^p\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n\right|^p$$

$$+2^p\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\xi_n^{(n_k)}\right|^p+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\xi_n\right|^p\right)$$

立即可得$x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{l^p}x$。

21. 证明S空间中的子集A列紧的充要条件是对每个n（$n=1, 2, 3, \cdots$），存在$C_n>0$，使得对一切$x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}\in A$，有

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

证 必要性：

证法一 用反证法，设A列紧，但存在n_0，使对一切自然数k有$x_k=(\xi_n^{(k)})\in A$，使

$$\left|\xi_{n_0}^{(k)}\right|\geqslant k$$

因为A列紧，不妨设$x_k\xrightarrow{S}x$，据参考文献[2]p20例11知

$$x_k\xrightarrow{S}x\Leftrightarrow\xi_n^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\xi_n \quad (\forall n)$$

收敛数列必有界，所以存在$K>0$，使$\left|\xi_{n_0}^{(k)}\right|<K(\forall k)$，矛盾。故对一切$x\in A$，有

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (n=1, 2, 3\cdots)$$

证法二 定义映射ϕ_n：$S\longrightarrow R^1$如下，$x=(\xi_n)\in S$，

令$\phi_n(x)=\xi_n$，显然ϕ_n是连续的，故$\phi_n(A)$列紧，$\phi_n(A)$必为R^1中有界集，即对每个n，存在$C_n>0$，使

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (\text{对一切}(\xi_n)\in A\text{成立})$$

充分性：

证法一　设条件成立，任取$\{x_k\}\subset A$，其中$x_k=(\xi_p^{(k)})$，因为$|\xi_n^{(k)}|\leqslant C_n(\forall k)$，则按对角线手续，取出子序列$\{n_k\}$，使

$$\lim_{k\to\infty}\xi_p^{(n_k)}=\xi_n \qquad (\forall n)$$

故A列紧。

证法二　因为S完备，故只须证明A存在列紧ε-网（对一切$\varepsilon>0$）。任给$\varepsilon>0$，存在N，当$m>N$时，有

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

令

$$B=\{(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_N,\ 0,\ \cdots)\mid(\xi_n)\in A\}$$

显然，B是A的ε-网，又因为B中之点只有前面N个坐标不为零，且

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

则容易证明B是列紧集。

22. 证明列紧集的闭包必是自列紧集。

证　设A列紧，任取$\{x_n\}\subset\overline{A}$，对每个$n$，由于$x_n\in\overline{A}$，必存在$y_n\in A$，使$\rho(x_n,\ y_n)<\frac{1}{n}$。因为$A$列紧，对于$\{y_n\}\subset A$，可取出子序列$y_{n_k}\longrightarrow y\in\overline{A}$，易证$x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}y$，

故$\overline{A}$自列紧。

23. 在数轴上添加无穷远点$-\infty$，$+\infty$，得到的集记为R^1，试在R^1中适当地定义距离，使R^1与区间[0，1]同胚（[0，1]的距离与R^1同）。

解 [0，1]中，$\rho(x, y)=|x-y|$，在R^1中我们令

$$\rho_1(x, y)=\frac{1}{\pi}|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$$

规定$\operatorname{arctg}(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$，易知$\rho_1$是一个距离，作[0，1]$\longrightarrow R^1$的映射$g(x)$如下：

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right) & \text{当}x\in(0, 1)\text{时}\\ -\infty & x=0\text{时}\\ +\infty & x=1\text{时}\end{cases}$$

则显然有

$$\rho_1(g(x), g(y))=\rho(x, y)$$

故g是[0，1]$\longrightarrow R^1$上的等距映射，从而[0,1]与R^1同胚。

24. 在数轴上添加一个无穷远点∞，得到的集记为R''，试在R''中适当定义距离，使R''平面与R^2上的单位圆周同胚（单位圆周的距离与R^2同）

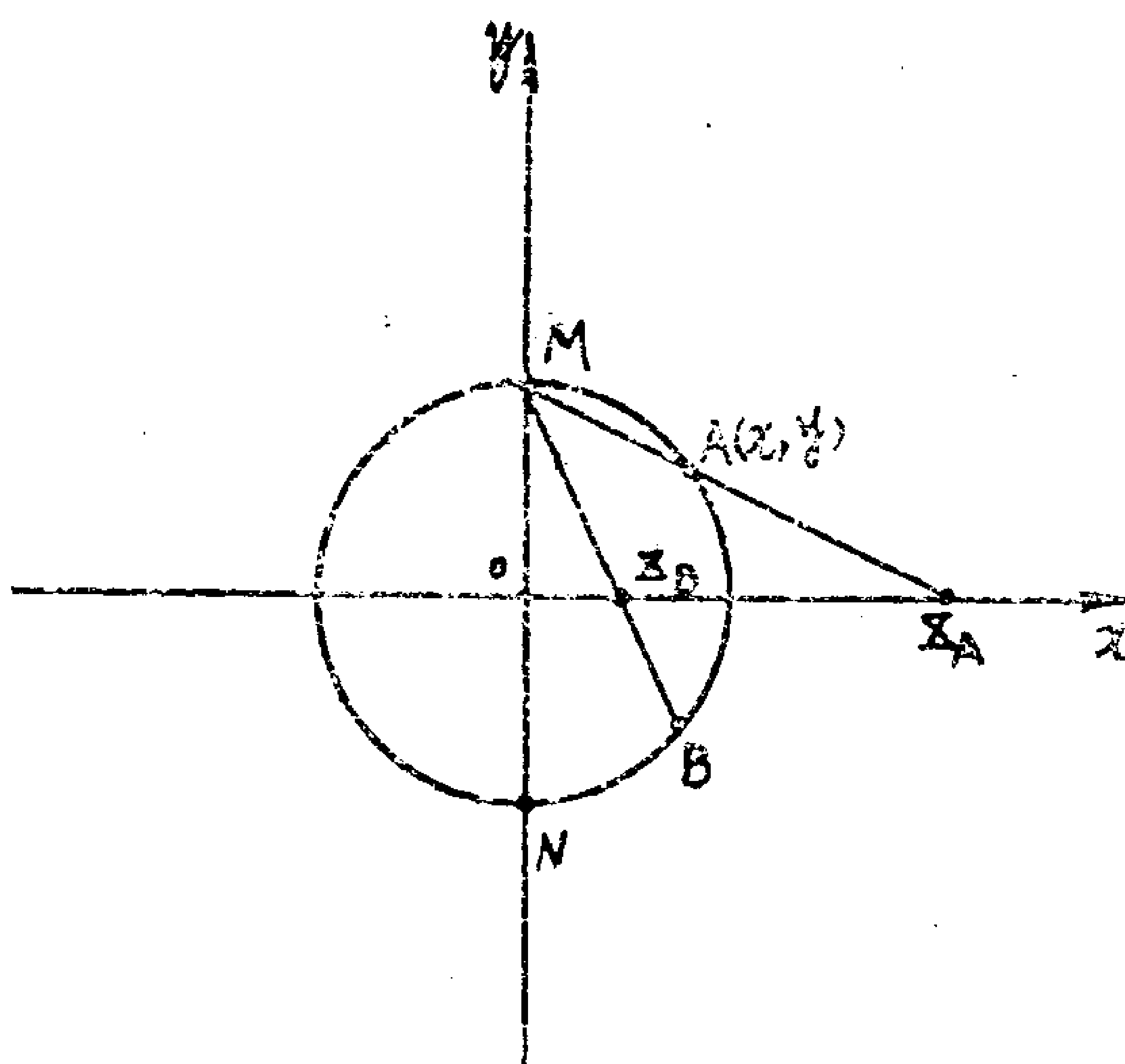
解 如图所示，作映射T：

C_1（单位圆周）$\longrightarrow R''$，$M\longleftrightarrow\infty$，$N\longleftrightarrow 0$

$$A(x, y)\longleftrightarrow X_A=\frac{x}{1-y}\quad(y\neq 1\text{时})$$

即

$$T(x, y)=\begin{cases}\frac{x}{1-y} & (y\neq 1\text{时})\\ \infty & (y=1\text{时})\end{cases}$$



且

$$T^{-1}: \quad y=\frac{X^2-1}{1+X^2}$$

$$x=\begin{cases}\sqrt{1-y^2} & (X\geqslant 0)\\ -\sqrt{1-y^2} & (X<0)\end{cases}$$

我们用$\rho(A, B)$表示C_1中的距离，并且令

$$\rho_1(X_A, X_B)=\rho(T^{-1}X_A, T^{-1}X_B)=\rho(A, B)$$

其中X_A，$X_B\in R''$，易知T是$C_1\longrightarrow R''$上的等距映射，故C_1与R''同胚。

25. 设$f(t)\in C[0,1]$，求出方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)ds \quad (t\in[0, 1])$$

的连续解。

解法一 据参考文献[2]$p45$例3知方程对一切λ存在

唯一解$x(t)\in C[0, 1]$，改写为原方程为

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t, s)x(s)ds=(Kx)(t)$$

其中

$$K(t,s)=\begin{cases}0 & t<s\\ 1 & t\geqslant s\end{cases}$$

由逐次逼近法，取$x_0(t)\equiv 0$，得

$$x_1=Kx_0,\quad x_2=K^2x_0,\quad \cdots,\quad x_n=K^nx_0$$

则

$$x(t)=\lim_{n\to\infty} x_n(t) \qquad (C[0, 1]\text{中收敛})$$

即为原方程之解。容易算出

$$x_1(t)=f(t), x_2(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)f(s)ds,\cdots,$$

$$x_{n+1}(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\lambda^k\int_0^1 K_k(t,s)f(s)ds$$

其中 $K_1(t,s)=K(t,s)$,

$$K_n(t,s)=\int_0^1 K(t,u)K_{n-1}(u,s)ds\ (n\geqslant 2)$$

从而

$$K_n(t,s)=\begin{cases}0 & t<s\\ \dfrac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1} & t\geqslant s\end{cases}$$

$$x_{n+1}(t)=f(t)+\lambda\int_0^t\left[1+\lambda(t-s)+\frac{\lambda^2(t-s)^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]f(s)ds$$

故

$$x(t)=\lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t)=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds$$

解法二 令

$$y(t)=\int_0^t x(s)ds$$

则$y'(t)=x(t)$，如果$x(t)$满足原方程，则$y(t)$必满足方程：

$$\begin{cases} y'(t)=f(t)+\lambda y(t) \\ y(0)=0 \end{cases} \tag{1}$$

易知方程(1)的解为

$$\overline{y}(t)=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds \tag{2}$$

再令

$$\overline{x}(t)=f(t)+\lambda\overline{y}(t)=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds \tag{3}$$

下面证明$\overline{x}(t)$为原方程之解。事实上，因为$y(t)$满足(1)，则

$$\overline{y}'(t)=f(t)+\lambda\overline{y}(t)=\overline{x}(t)$$

所以

$$\overline{y}(t)=\int_0^t \overline{x}(s)ds$$

由(3)知

$$\overline{x}(t)=f(t)+\lambda\int_0^t \overline{x}(s)ds$$

故$\overline{x}(t)=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds$为原方程的连续解。

26. 设T为完备距离空间X到X的映射，如果

$$\alpha_0=\inf_n \sup_{x\neq y}\frac{\rho(T^n x,\ T^n y)}{\rho(x,\ y)}<1$$

则T存在唯一的不动点。

证 令

$$a_n = \sup_{x \neq y} \frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x, y)}$$

则

$$a_0 = \inf_n a_n < 1$$

故存在n_0使 $0 \leqslant a_{n_0} < 1$，令$\theta = a_{n_0}$，我们就有

$$\rho(T^{n_0} x, T^{n_0} y) \leqslant \theta \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in X)$$

据参考文献[2]定理3.2($p44$)，T必存在唯一不动点。

27. 设X是距离空间，证明不等式

$$|\rho(x, z) - \rho(z, y)| \leqslant \rho(x, y)$$

其中$x, y, z \in X$。

28. 设F_1，F_2是距离空间X中的集合，其中一个是紧集，另一个是闭集，试证明：若$\rho(F_1, F_2) = 0$，则存在$x_0 \in F_1 \cap F_2$。

证 因为$\rho(F_1, F_2) = \inf\limits_{\substack{x \in F_1 \\ y \in F_2}} \rho(x, y) = 0$，则存在$x_n \in F_1$，$y_n \in F_2$，使

$$\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

设F_1为紧集，F_2为闭集，由于$\{x_n\} \subset F_1$，则存在子序列$x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in F_1 (k \longrightarrow \infty)$，但

$$\rho(y_{n_k}, x_0) \leqslant \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

故$y_{n_k} \longrightarrow x_0 \in F_2$，即$x_0 \in F_1 \cap F_2$。

29. 如果在参考文献[2]定理3.1中$\theta = 1$，不等式(3)为严格不等式，举例说明定理的结论可以不真。

解 令$X = [0, +\infty)$，$Tx = x + \frac{1}{1+x}$ $(x \in [0, +\infty))$，我们容易证明对一切x，$y \in [0, +\infty)$，$x \neq y$时，有

$$|Tx-Ty|<|x-y|$$

但T在$[0,\ \infty)$中没有不动点。

30. 在线性拓扑空间E中，问下列叙述是否成立：

（i）设$A\subset E$为闭集，则$x+A$，αA也是闭集；

（ii）E的子空间的闭包也是子空间。

31. 设A是线性拓扑空间E中的凸集，$\overset{\circ}{A}\neq\phi$，则对于任何$x\in\overset{\circ}{A}$，$y\in A$以及$\alpha(0<\alpha<1)$，$\alpha x+(1-\alpha)y\in\overset{\circ}{A}$。

证 因为$x\in\overset{\circ}{A}$，则存在x的一个邻域$U_x=U_0+x$，使$U_x\subset A$。不妨设U_0是0点的均衡环境，于是$\alpha U_x=\alpha U_0+\alpha x$是$\alpha x$的一个邻域。显然

$$\alpha U_x+(1-\alpha)y\subset A$$

因为$\alpha U_x+(1-\alpha)y$是$\alpha x+(1-\alpha)y$的一个邻域，故

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in\overset{\circ}{A}$$

32. 设X为全有界距离空间，证明对任意的$\varepsilon>0$以及任一无穷子集$M\subset X$中，存在一个无穷子集M_0，使得M_0的直径$<\varepsilon$。

33. 设$f(x)$，$f_n(x)$在紧空间E上连续，$f_n(x)$处处收敛于$f(x)$，$f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$（对每个$x\in E$，$n=1,2,\cdots$），证明$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$。

提示 任给$\varepsilon>0$，考察集合

$$G_n=\{x\in E:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$$

证明$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，并利用紧空间特征。

34. 设F为距离空间(X,ρ)中的紧集，T为F到F中的映像，满足条件：对一切x，$y\in F$，$x\neq y$，

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$$

则T在F中存在唯一不动点。

提示 令$\phi(x) = \rho(Tx, x)$，证明ϕ是定义在F上的连续函数，利用紧集上连续函数的性质求出不动点。

35. 设$V[a, b]$表在$[a, b]$上囿变、右连续函数的全体，其线性运算与$C[a, b]$中的相同，在$V[a, b]$中定义范数

$$\|x\| = |x(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(x)$$

则$V[a, b]$是一个巴拿赫空间。

证 $V[a, b]$为线性空间显然，今证$\|\cdot\|$满足范数公理。$\|x\| \geqslant 0$及$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$显然成立，$\|x\| = 0$等价于$x(a) = 0$，且$\overset{b}{\underset{a}{V}}(x) = 0$也等价于对任一分划$\Delta$: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$，成立

$$\begin{cases} x(a) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} |x(t_i) - x(t_{i-1})| = 0 \end{cases}$$

也等价于 $x(t) \equiv 0$，

$$\|x + y\| \leqslant |x(a)| + |y(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(x) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(y)$$
$$= \|x\| + \|y\|$$

最后证明$V[a, b]$的完备性：

$$\rho(x, y) = |x(a) - y(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(x - y)$$

设$\{x_n(t)\}$是$V[a, b]$中任一基本列，则任给$\varepsilon > 0$，存在N，

当n, $m>N$时，有

$$\rho(x_m,\ x_n)=|x_m(a)-x_n(a)|+\bigvee_a^b(x_m-x_n)<\varepsilon$$

容易证明$x_n(t)$必一致收敛。记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$，只要证明$x(t)\in V[a,\ b]$，且$\|x_n-x\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$。

(i) $x(t)$的右连续性：设$\Delta t>0$，因为

$$|x(t)-x(t+\Delta t)|\leqslant|x(t)-x_n(t)|$$
$$+|x_n(t)-x_n(t+\Delta t)|+|x_n(t+\Delta t)-x(t+\Delta t)|$$

因而利用$x_n(t)$一致收敛于$x(t)$以及$x_n(t)$的右连续性，立即得$x(t)$的右连续性。

(ii) $\bigvee_a^b(x)<+\infty$以及$\|x_n-x\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$：因为$x_n(t)$是$V[a,\ b]$中基本列，所以对任给的$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n$, $m\geqslant N$时，有

$$|x_m(a)-x_n(a)|+\sum_{i=1}^{k}|x_m(t_i)-x_n(t_i)-x_m(t_{i-1})+$$
$$+x_n(t_{i-1})|\leqslant\|x_n-x_m\|<\varepsilon$$

对一切分划Δ成立。上式中固定$n\geqslant N$，令$m\longrightarrow\infty$，得

$$|x(a)-x_n(a)|+\sum_{i=1}^{k}|x(t_i)-x_n(t_i)-x(t_{i-1})$$
$$+x_n(t_{i-1})|\leqslant\varepsilon$$

故当$n\geqslant N$时有$\|x-x_n\|\leqslant\varepsilon$，这就证明了$x(t)\in V[a,\ b]$以及$\rho(x_n,\ x)\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$。

36. 设M_0是$[a,\ b]$上有界函数的全体，线性运算的定义与$C[a,\ b]$中的相同，在M_0中定义范数

$$\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$$

求证M_0是Banach空间。

证 $\|.\|$满足范数公理显然，我们仅证明完备性。设$\{x_n(t)\}$是M_0中任一基本列，则对任给的$\varepsilon>0$，存在N，当m，$n>N$时，有

$$\sup_{t\in[a,\ b]} |x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$$

故$x_n(t)$在$[a,\ b]$上一致收敛于某一函数$x(t)$。又因为

$$|x(t)|\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)|$$

所以$x(t)\in M_0$，最后据M_0中收敛与一致收敛等价可得

$$\|x_n-x\|\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

故M_0是Banach空间。

37，设H^P（$0<P\leqslant 1$）表示$[a,\ b]$上满足霍尔得条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|^P$$

的函数全体，线性运算的定义与$C[a,\ b]$中的相同，在H^P中定义范数

$$\|x\|=|x(a)|+\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^P}$$

求证H^P为Banach空间。

证 我们仅证明H^P的完备性，设$\{x_n(t)\}$为H^P中任一基本列，则对任给的$\varepsilon>0$，存在N，当n，$m>N$时，有

$$|x_n(a)-x_m(a)|+$$

$$\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\frac{|x_n(t_1)-x_m(t_1)-x_n(t_2)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^P}<\varepsilon$$

由此可得$x_n(t)$在$[a,\ b]$上处处收敛。记极限函数为$x(t)$，下面证明$x(t)\in H^P$，且$\|x_n-x\|\longrightarrow 0$（$n\longrightarrow\infty$）。任取$a\leqslant t_1<t_2\leqslant b$，当$n$，$m>N$时，有

$$|x_n(a)-x_m(a)|+\frac{|x_n(t_1)-x_m(t_1)-x_n(t_2)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^P}$$

$$\leqslant \| x_n - x_m \| < \varepsilon$$

在上式中固定$n>N$，令$m\longrightarrow\infty$，得

$$|x_n(a)-x(a)|+\frac{|x_n(t_1)-x(t_1)-x_n(t_2)+x(t_2)|}{|t_1-t_2|^P}\leqslant\varepsilon$$

从而

$$\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^P}\leqslant\varepsilon+\|x_n\| \qquad (n>N)$$

则$x(t)\in H^P$，且当$n>N$时，有

$$\|x_n-x\|\leqslant\varepsilon$$

故$x_n\longrightarrow x$，H^P为Banach空间。

38. 设m为一切有界数列组成的集，线性运算与l^P中的相同，在m中令

$$\|x\|=\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|$$

其中$x=\{\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots\}\in m$,则$m$为不可分的Banach空间。

证 m为赋范线性空间显然，今证完备性。设$\{x_n\}$为m中任一基本列，其中$x_n=\{\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\ \xi_i^{(n)},\cdots,\}$，则对任给的$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n$，$m>N$时，有

$$\|x_n-x_m\|=\sup_{i\geqslant 1}\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|<\varepsilon$$

故对每个i，$\{\xi_i^{(n)}\}$是一个收敛数列，记$\xi_i=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$，因为对每个$i$，当$n$，$m>N$时，有

$$\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|<\varepsilon$$

固定$n>N$，令$m\longrightarrow\infty$，则得

$$\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|\leqslant\varepsilon\quad(i=1,2,3,\cdots,n>N)$$

所以$\|x_n-x\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$，且$x=(\xi_i)\in m$。

下面证明m是不可分的。记

$$K=\{(\xi_i)\mid\xi_i=0\text{或}1\}$$

易知K不可列，其势为$\aleph$，且$x,y\in K,x\neq y$时，$\|x-y\|=1$。若m可分，则存在可列子集$\{y_k\}$在m中稠密，我们以K中之点为中心，$\frac{1}{3}$为半径作开球，这种开球所成的类的势为$\aleph$。

由于$\overline{\{y_k\}}=m$，则每个球中都含有$\{y_k\}$中之点，从而至少有一个y_t同属于两个不同的开球，例如同属于$S(x,\frac{1}{3})$，$S(y,\frac{1}{3})$，其中x，$y\in K$，$x\neq y$，则

$$1=\rho(x,y)\leqslant\rho(x,y_t)+\rho(y_t,y)\leqslant\frac{2}{3}$$

矛盾，故m为不分的Banach空间。

39. 设C为一切收敛数列组成的集，线性运算与l^p中的相同，在C中令

$$\|x\|=\sup_{n\geqslant1}|\xi_n|$$

其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in C$，则$C$为可分的Banach空间。

证 完备性：设$\{x_n\}$为C中任一基本列，其中$x_n=\{\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_i^{(n)},\cdots\}$，则对任给的$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n$，$m>N$时，有

$$\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|<\varepsilon\quad(i=1,2,3,\cdots)\quad(*)$$

故 $\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$ 存在，记 $\xi_i=\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，因为

$$\left|\xi_{i+p}-\xi_i\right|=\left|\xi_{i+p}-\xi_{i+p}^{(n)}\right|+\left|\xi_{i+p}^{(n)}-\xi_i^{(n)}\right|+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|$$

由此立即可知 $\lim_{i\to\infty}x_i$存在，故$x=(\xi_i)\in C$。又若在(*)中固定$n>N$，令$m\longrightarrow\infty$，则得

$$\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|\leqslant\varepsilon\quad(i=1,2,3,\cdots,\ n>N)$$

所以$\|x_n-x\|\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$，空间$C$的完备性特征得证。

可分性：记$E_0=\{(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ r,\ r,\ \cdots)\mid n$为任一自然数，$r_i$，$r$均为有理数$\}$，则$E_0\subset C$，且可列。下面证明$E_0$在$C$中稠。任取$x=(\xi_n)\in C$，则

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$$

故存在N及有理数r，使$n>N$时，有

$$|\xi_n-r|<\varepsilon$$

对于ξ_1，ξ_2，…，ξ_N，必存在有理数r_1，r_2，…，r_N，使

$$|\xi_i-r_i|<\varepsilon\qquad(i=1,2,\cdots,N)$$

令$y=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_N,\ r,\ r,\ \cdots)$，则$y\in E_0$，且

$$\rho(x,\ y)<\varepsilon$$

由于ε是任意的，故E_0在C中稠密，所以C是可分的Banach空间。

40. 设C_0为一切收敛于零的数列组成的集，线性运算与l^p中的相同，在C_0中令

$$\|x\|=\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|$$

其中$x=\{\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots\}\in C_0$，则$C_0$为可分的

Banach空间。

提示 方法同本章第39题，对于可分性，只需取

$$E_0=\{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots)$$

n为任一自然数，r_i为有理数（$i=1, 2, \cdots, n$）}

然后证明E_0在C_0中稠密。

41. 用$\mathscr{L}^2(-\infty, +\infty)$表示定义在$(-\infty, +\infty)$上的可测函数，且满足

$$\|x\|^2=\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt<\infty \qquad (1)$$

的实值函数全体，证明$\mathscr{L}^2(-\infty, +\infty)$按（1）定义的范数是一个赋范线性空间（规定$\mathscr{L}^2(+\infty, -\infty)$中的零元为满足$\overline{\lim\limits_{T\to+\infty}}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=0$的元素）。

42. 用$C_0(-\infty, +\infty)$表示定义在$(-\infty, +\infty)$上且在某个有限区间之外为零的连续函数全体，这里的有限区间将随着函数的不同而不同。问$C_0(-\infty, +\infty)$按范数

$$\|x\|=\sup_{t\in(-\infty, +\infty)}|x(t)|$$

导出的距离是否完备？若不完备，试求出它的完备化空间。

解 我们记

$$\widetilde{C}_0=\{x(t)\in C(-\infty, +\infty): \lim_{t\to\infty}x(t)=0\}$$

$x(t)\in\widetilde{C}_0$时，规定范数

$$\|x\|=\sup_{t\in(-\infty, +\infty)}|x(t)|$$

可以证明$\widetilde{C}_0$是一个完备的赋范线性空间。任取$x(t)\in\widetilde{C}_0$，

$\ddot{x}(t)\overline{\in}C_0(-\infty, +\infty)$，若令连续函数$x_n(t)$如下：

$$x_n(x)=\begin{cases}x(t) & t\in[-n, n]\\ 0 & t\in(-\infty, -n-\frac{1}{2}]\cup[n+\frac{1}{2}, +\infty)\\ \text{线性} & t\in[-n-\frac{1}{2}, -n]\cup[n, n+\frac{1}{2}]\end{cases}$$

则$x_n(t)\in C_0(-\infty,+\infty)$，且$\{x_n(t)\}$是$C_0(-\infty,+\infty)$中的基本列，显然$\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$，但$x(t)\overline{\in}C_0(-\infty,+\infty)$故$C_0(-\infty, +\infty)$不完备，$\widetilde{C}_0$是$C_0(-\infty, +\infty)$的完备化空间。

43. 设E为Banach空间，$A\subset E$为闭子集，$B\subset E$为紧子集，证明$A+B=\{x+y: x\in A, y\in B\}$是闭的。

证 设$x_n+y_n\in A+B$，$x_n+y_n\longrightarrow z(n\longrightarrow\infty)$，其中$x_n\in A$，$y_n\in B$，因为$B$是紧集，我们不妨设$y_n\to y_0\in B$，则

$$x_n=(x_n+y_n)-y_n\longrightarrow z-y_0 \quad (n\to\infty)$$

令

$$x_0=z-y_0$$

因为A闭，$x_n\in A$，则$x_0\in A$，于是

$$z=x_0+y_0\in A+B$$

这就证明了$A+B$的闭性。

44. 证明空间S(见参考文献[2]p18例10)不可赋范，即在S上不可能定义一个范数，使得由这个范数导出的拓扑与S的原拓扑等价。

证 设存在S上的一个范数$\|.\|$，使S由$\|.\|$导出的拓扑与原拓扑等价，则对$(S, \|.\|)$中的开球$O=\{x\in S: \|x\|<1\}$必存在邻域$U_\delta\subset(S, \rho)$，其中

$$U_\delta=\{x(t)\in S: \rho(x,0)=\int_E\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt<\delta\}$$

使得

$$U_\delta \subset O$$

不妨设$0<\delta<1$以及$m([0,\ \delta]\cap E)>0$，我们令

$$x(t)\leqslant\begin{cases}\frac{1}{t} & t\in[0,\delta]\cap E\\ 0 & t\in E-[0,\delta]\end{cases}$$

因为

$$\rho(x,0)\leqslant\int_0^\delta \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}dt=\int_0^\delta \frac{1}{1+t}dt$$

$$=\ln(1+\delta)<\delta$$

则$x(t)\in U_\delta$。又因为对任意的$\lambda>1$，

$$\rho(\lambda x(t),0)\leqslant\int_0^\delta \frac{\frac{\lambda}{t}}{1+\frac{\lambda}{t}}\ dt$$

$$=\int_0^\delta \frac{\lambda}{t+\lambda}dt$$

$$=\lambda\ \ln\ (\ 1+\frac{\delta}{\lambda}\ )$$

$$<\delta$$

故对一切$\lambda>1$，$\lambda x(t)\in U_\delta\subset O$,这是不可能的,从而$S$不可赋范。

45. 设X为赋范线性空间，$X\neq\{0\}$，证明X完备的充分必要条件是单位球面$S_1=\{x\in X:\ \|x\|=1\}$完备。

第五章　线性有界算子

一、基本概念和主要定理

有界线性算子　设X和Y是赋范线性空间，映射T：$\mathscr{D}(T)\subset X\longrightarrow Y$是线性映射，如果存在常数$M>0$，使对一切$x\in\mathscr{D}(T)$，有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$$

则称映射T为有界线性算子。线性算子T的有界性等价于连续性，也等价于T在原点连续。如果$Y=R$或者$Y=C$，$f\in\mathscr{B}(X, Y)$，则称f为有界线性泛函。$X\longrightarrow Y$有界线性算子全体记作$\mathscr{B}(X, Y)$，当$Y=X$时，简记为$\mathscr{B}(X)$。如果规定$T\in\mathscr{B}(X, Y)$的范数为

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

则当Y完备时，$\mathscr{B}(X, Y)$也是一个Banach空间。

逆算子　设线性算子T是$(X, \|\cdot\|)$到其值域$R(T)$上的一对一映射，则称T是X到$R(T)$上的可逆算子。如果线性算子S满足$ST=I_X$（I_X为X中的恒同算子），则称S为T的左逆；如果线性算子S'满足$TS'=I_Y$（I_Y为Y中恒同算子），则称S'为T的右逆；如果线性算子T的左逆和右逆同时存在，则T必是$X\longrightarrow Y$上的可逆算子，且$T^{-1}=S=S'$。

$T\in\mathscr{B}(X)$，T^{-1}是$R(T)\longrightarrow X$的有界线性算子的充要

条件是存在常数$\alpha>0$，使对一切$x\in X$，有

$$\|Tx\|\geqslant\alpha\|x\|$$

设$T\in\mathscr{B}(X)$，$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n$$

上式右边级数在$\mathscr{B}(X)$中收敛。

闭线性算子 设X，Y是赋范线性空间，T：$\mathscr{D}(T)\subset X\longrightarrow Y$是线性算子，若对任何$x_n\in\mathscr{D}(T)$，当$x_n\longrightarrow x$，$Tx_n\longrightarrow y$时，有$x\in\mathscr{D}(T)$以及$y=Tx$，则称$T$为闭线性算子，简称闭算子。$T$是闭算子的充要条件是$T$的图像$G(T)=\{(x,Tx)$：$x\in\mathscr{D}(T)\}$为$X\times Y$中的闭子空间。

容易证明：(i)如果T是闭算子，T^{-1}存在，则T^{-1}也是闭算子；(ii)设X完备，T是闭算子，若T^{-1}存在连续，则T的值域$R(T)$是闭的。

全连续线性算子 设X，Y是赋范线性空间，T：$X\longrightarrow Y$是线性算子，若T将X中的任一有界集映为Y中的列紧集，则称T为全连续线性算子，简称为全连续算子。

设$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，若T的值域为有穷维空间，则称T为有穷秩算子，易知有穷秩算子必为全连续算子。

全连续算子T有下列简单性质：

(i)若x_n弱收敛于x_0，则Tx_n强收敛于Tx_0；

(ii)T的值域$R(T)$必可分；

(iii)若T全连续，则T^*也全连续；

(iv)设Y完备，$\{T_n\}$为$\mathscr{B}(X,Y)$中的全连续算子序列，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，若T_n一致收敛于T（即$\|T_n-T\|\longrightarrow 0$），则$T$也是全连续算子。反之，若$Y$是具有可数基

（Schauder基）的Banach空间，则对任一全连续算子$T\in\mathscr{B}(X, Y)$，存在有穷秩算子T_n一致收敛于T.

共轭空间和共轭算子 设X为赋范线性空间，X上的全部有界线性泛函组成的集合记作X^*，称X^*为X的共轭空间；共轭空间X^*一定是Banach空间；X的二次共轭空间$X^{**}=(X^*)^*$。

设$T\in\mathscr{B}(X, Y)$，定义$T^*\in\mathscr{B}(Y^*, X^*)$如下：

$$T^*f(x)=f(Tx) \qquad (\forall f\in Y^*,\ x\in X)$$

称T^*为T的共轭算子，可以证明$\|T^*\|=\|T\|$。

自然嵌入映射和自反空间 规定映射$J: X\longrightarrow X^{**}$如下：$x\in X$，令$F_x\in X^{**}$,$F_x(f)=f(x)(\forall f\in X^*)$，并记

$$Jx=F_x$$

则称J为$X\longrightarrow X^{**}$的自然嵌入映射；若$JX=X^{**}$，则称X为自反Banach空间。

一致凸Banach空间 设X为Banach空间，若对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$（$\|x\|=\|y\|=1$），就有$\|x+y\|\leqslant 2-\delta$，则称$X$为一致凸Banach空间。可以证明Hilbert空间是一致凸的，一致凸的Banach空间必是自反Banach空间。

Banach空间中的强收敛和弱收敛 设$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$，若$\|x_n-x\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$，则称$\{x_n\}$强收敛于$x$，简记为$x_n\xrightarrow{S}x$；如果对任一$f\in X^*$，$f(x_n)\longrightarrow f(x)\ (n\to\infty)$，则称$\{x_n\}$弱收敛于$x$，简记为$x_n\xrightarrow{W}x$；设$\{f_n\}\subset X^*$，$f\in X^*$，如果对任一$x\in X$，$f_n(x)\longrightarrow f(x)\ (n\to\infty)$，则称$\{f_n\}$* 弱收敛于$f$，简记为$f_n\xrightarrow{*W}f$.

Banach空间X中点列$\{x_n\}$强收敛于x，必可推出$\{x_n\}$弱收敛于x，反之不一定成立。X^*中点列$\{f_n\}$强收敛于f（即$\|f_n-f\|\to 0$），必可推出$\{f_n\}$ * 弱收敛于f，反之也不一定成立。

定理 1（Baire Category） 设(X,ρ)是完备距离空间，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则必存在$k_0$，使$E_{k_0}$在$X$的某个闭球中稠密，即$X$为第二纲集。

定理 2（Hahn-Banach） 设G为赋范线性空间X中的子空间，f是定义在G上的有界线性泛函，则存在$F\in X^*$，使$\|F\|=\|f\|_G$，$x\in G$时，$f(x)=F(x)$。

定理 3（Banach逆算子定理） 设X，Y均为Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，若T是$X\longrightarrow Y$上的一对一映射，则$T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$。

定理 4（开映射定理） 设X，Y均是Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，若$TX=Y$，则T是开映射（即将X中开集映成Y中的开集）。

定理 5（闭图象定理） 设X，Y均是Banach空间，T：$X\longrightarrow Y$的闭线性算子，则T有界。

定理 6（共鸣定理） 设X为Banach空间，Y为赋范线性空间，$\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}\subset\mathscr{B}(X,Y)$，若对任一$x\in X$，

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\|T_\alpha x\|<+\infty$$

则必有

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\|T_\alpha\|<+\infty$$

设X为线性空间，$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$是定义在X上的两个范

数，若存在正数K_1，K_2，使不等式

$$K_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant K_2\|x\|_1$$

对一切$x\in X$成立，则称$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价。利用Banach逆算子定理可以证明：

如果线性空间X上的两个范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$，均使X成为Banach空间，且不等式

$$\|x\|_2\leqslant K\|x\|_1$$

对一切$x\in X$成立，其中K为常数，则$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$等价。

有界线性算子的谱和正则集　设X为复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则称

$$\rho(T)=\{\lambda\in C:\ (\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)\}$$

为算子T的正则集；称正则集$\rho(T)$的补集

$$\sigma(T)=C\setminus\rho(T)$$

为算子T的谱集；$\lambda\in\rho(T)$时，$R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$称作$T$的预解式。$\sigma(T)$是复平面$C$上的有界闭集，$R(\lambda;T)$是开集$\rho(T)$上的解析函数。

称

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\sigma(T):\ (\lambda I-T)x=0\text{有非零解}\}$$

为算子T的点谱，$\lambda\in\sigma_p(T)$为T的特征值；

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\sigma(T):\ (\lambda I-T)x=0\text{只有零解，}(\lambda I-T)\text{的值域在}X\text{中稠密}\}$$

为算子T的连续谱；

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\sigma(T):\ (\lambda I-T)x=0\text{只有零解，}(\lambda I-T)\text{的值域在}X\text{中不稠密}\}$$

为算子T的剩余谱。易知

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma c(T)\cup\sigma_r(T)$$

全连续算子T的Riesz-Schauder理论　设$T\in\mathscr{B}(X)$是全连续算子，则

(i) X为无穷维时，$0\in\sigma(T)$；$\sigma(T)$或者是有限集，或者是仅以0为聚点的可列集；

(ii) $\lambda\neq 0$时，或者$\lambda\in\rho(T)$，或者$\lambda\in\sigma_p(T)$，且$\lambda\in\sigma_p(T)$。$\lambda\neq 0$时，λ所对应的特征向量空间是有穷维的；

(iii) $\sigma(T)=\sigma(T^*)$，且$\lambda\neq 0$，$\lambda\in\sigma_p(T)\Leftrightarrow\lambda\in\sigma_p(T^*)$；

(iv) 设$\lambda\neq\mu$，$\lambda\in\sigma_p(T)$，$\mu\in\sigma_p(T^*)$，L_λ，L_μ^*分别为T和T^*相应于λ，μ的特征向量空间，则$L_\lambda\perp L_\mu^*$；

(v) $\lambda\in\sigma_p(T)$，$\lambda\neq 0$时，有

$$\dim L_\lambda=\dim L_\lambda^*$$

这里$\dim L_\lambda$表示特征向量空间L_λ的维数。

二、例题、习题与解法

1. 设无穷阵(α_{ij}) $(i, j=1, 2, 3, \cdots)$满足

$$\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|<+\infty$$

则$y=Tx$：　$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j$，其中$x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$，$y=\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$，是由$m$到$m$中的有界线性算子，且

$$\|T\|=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|$$

证　T是线性算子显然。因为

$$\|y\| = \sup_i |\eta_i| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \right|$$

$$\leqslant \left(\sup \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) \cdot \|x\|$$

所以

$$\|T\| \leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \qquad (1)$$

另一方面，令

$$x_i = \{\mathrm{sgn}\,a_{i1},\ \mathrm{sgn}\,a_{i2},\ \cdots,\ \mathrm{sgn}\,a_{in},\ \cdots\}$$

则$x_i \in m$，$\|x_i\| \leqslant 1$ （$i=1, 2, 3, \cdots$），而

$$Tx_i = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\mathrm{sgn}\,a_{ij},\quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}\,\mathrm{sgn}\,a_{ij},\quad \cdots \right\}$$

$$\|T\| \geqslant \|Tx_i\| \geqslant \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\,\mathrm{sgn}\,a_{ij} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

$$(i=1, 2, 3, \cdots)$$

故

$$\|T\| \geqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \qquad (2)$$

由（1），（2）立即得

$$\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

2. 对于怎样的函数$a(t)$，算子$Tx(t) = a(t)x(t)$在$C[a,b]$中是连续的？如果它是连续的，试求它的范数。

解 当$a(t)\in C[a,b]$时,$Tx(t)=a(t)x(t)$是$C[a,b]$中的有界线性算子。显然有$\|T\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|a(t)|$。

3. 对于怎样的函数$a(t)$，算子$Tx(t)=a(t)x(t)$在$L^2[a,b]$中连续？如果它是连续的，试求它的范数。

解 $a(t)\in L^{\infty}[a,b]$时，$Tx(t)=a(t)x(t)$是$L^2[a,b]$中的有界线性算子，显然

$$\|T\|\leqslant\|a(t)\|_{\infty}=\alpha$$

因为

$$\alpha=\operatorname*{varisup}_{a\leqslant t\leqslant b}|a(t)|$$

任给$\varepsilon>0$，令

$$E=\{t\in[a,\ b]:\ |a(t)|\quad \alpha-\varepsilon\}$$

则$mE>0$，我们取$x(t)\in L^2[a,b]$如下：

$$x(t)=\begin{cases}\operatorname{sgn}a(t)/(mE)^{\frac{1}{2}} & t\in E\\ 0 & t\in[a,\ b]-E\end{cases}$$

则 $\|x(t)\|=1$，且

$$\|T\|\geqslant\|Tx\|=\left\{\int_E\frac{|a(t)|^2}{mE}dt\right\}^{\frac{1}{2}}\geqslant\alpha-\varepsilon$$

因为$\varepsilon>0$是任意的，故$\|T\|\geqslant\alpha$，从而

$$\|T\|=\operatorname*{varisup}_{t\in[a,b]}|a(t)|$$

4. 设$K(t,\ s)$是$a\leqslant t\leqslant b$，$a\leqslant s\leqslant b$上的可测函数，且$\int_a^b|K(t,\ s)|dt$对$[a,\ b]$上几乎所有的s存在，且作为s的函数是本性有界的，令

$$y=Tx:y(t)=\int_a^b K(t,\ s)x(s)ds$$

则T是$L[a, b]$到其自身的有界线性算子，且

$$\|T\| = \operatorname*{vari\,sup}_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(t, s)|dt$$

证 不妨设$K(t, s)$为实函数，令

$$\alpha = \operatorname*{vari\,sup}_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(t, s)|dt$$

T显然是$L[a, b]\longrightarrow L[a, b]$中的有界线性算子，且$\|T\|\leqslant \alpha$。

为了证明$\|T\|\geqslant\alpha$，我们考察共轭算子T^*：

$$(T^*x)(s) = \int_a^b K(t, s)x(t)dt \qquad (x(t)\in L^\infty[a,b])$$

T^*是$L^\infty[a,b]\to L^\infty[a,b]$中的有界线性算子，且$\|T\| = \|T^*\|$，故只要证明$\|T^*\|\geqslant\alpha$。任取$\varepsilon>0$，令

$$E = \left\{ s\in[a, b] \;\middle|\; \int_a^b |K(t, s)|dt > \alpha-\varepsilon \right\}$$

则$mE>0$。因为$\int_a^b |K(t,s)|dt$关于s本性有界，所以

$$\int_a^b\int_a^b |K(t, s)|dt\, ds < +\infty$$

根据积分的性质，必存在连续函数$K_n(t, s)$，使

$$\int_a^b\int_a^b |K_n(t, s)-K(t, s)|dt\, ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

从而可得

$$\int_a^b |K_n(t, s)-K(t, s)|dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{mes}} 0$$

由Riesz定理，存在子序列n_k，使上式对$n=n_k$几乎处处收敛于0。为简单起见，不妨设$\int_a^b |K_n(t,s)-K(t,s)|dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.e}} 0$，再据叶果洛夫定理，存在闭集$F\subset E$，使$mF>0$，以及

$$\int_a^b |K_n(t,\ s)-K(t,\ s)|\,dt \xrightarrow[\text{在F上}]{\text{一致}} 0 \qquad (1)$$

因为$mF>0$，则必存在$s_0\in F$，使对s_0的一切邻域$U(s_0)$有

$$m(U(s_0)\cap F)>0$$

又因为$s_0\in F\subset E$，故

$$\int_a^b |K(t,\ s_0)|\,dt>\alpha-\varepsilon \qquad (2)$$

由(1)可知存在邻域$U(s_0)$及自然数N，使对一切$s\in U(s_0)\cap F$成立

$$\int_a^b |K(t,\ s)-K(t,\ s_0)|\,dt\leqslant\int_a^b |K(t,\ s)-K_N(t,s)|\,dt+\int_a^b |K_N(t,\ s)-K_N(t,\ s_0)|\,dt+\int_a^b |K_N(t,\ s_0)-K(t,\ s_0)|\,dt<\varepsilon \qquad (3)$$

现取$\varphi(t)=\mathrm{sgn}K(t,\ s_0)\in L^\infty[a,b],\|\varphi\|_\infty=1$，$\varphi(t)$显然可测，则由(3)得

$$\left|\int_a^b K(t,\ s)\varphi(t)dt-\int_a^b K(t,\ s_0)\varphi(t)\,dt\right|<\varepsilon$$

$$(\forall s\in U(s_0)\cap F)$$

从而当$s\in U(s_0)\cap F$时，有

$$\left|\int_a^b K(t,\ s_0)\varphi(t)\,dt\right|-\left|\int_a^b K(t,\ s)\varphi(t)\,dt\right|<\varepsilon$$

则$s\in U(s_0)\cap F$时，成立

$$\left|\int_a^b K(t,\ s)\varphi(t)\,dt\right|\geqslant\int_a^b |K(t,\ s_0)|dt-\varepsilon>\alpha-2\varepsilon$$

故

$$\|T^*\|\geqslant\operatorname*{varisup}_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(t,\ s)\varphi(t)\,dt\right|\geqslant\alpha-2\varepsilon$$

由于$\varepsilon>0$是任意的，所以$\|T^*\|=\|T\|\geqslant a$，从而$\|T\|=a$。

5. 设$\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|<+\infty$，在$l$中定义线性算子：

$$y=Tx:\eta_n=\alpha_n\zeta_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

其中 $x=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$，则$T$是有界线性算子，且

$$\|T\|=\sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n|$$

证 因为$\|Tx\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\zeta_n|\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|\cdot\|x\|$，所以

$$\|T\|\leqslant\sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n|$$

另一方面，取$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{位}},0,\cdots)\in l$，$\|e_n\|=1$，

则

$$\|T\|\geqslant\|Te_n\|=|\alpha_n|\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

所以

$$\|T\|\geqslant\sup_{n=1}|\alpha_n|$$

故 $\|T\|=\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|$。

6. 证明上题中的T存在有界逆算子的充要条件是

$$\inf_{n\geqslant 1}|\alpha_n|>0$$

证 充分性：令$Sy=(\dfrac{1}{\alpha_n}\eta_n)$，其中 $y=(\eta_n)$，则易知

$ST=TS=I$，所以$T^{-1}=S$，据第5题，$\|T^{-1}\|=\dfrac{1}{\inf\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|}$，

故T^{-1}有界。

必要性：若T^{-1}存在有界，则存在$\alpha>0$，使

$$\|Tx\|\geqslant\alpha\|x\| \qquad (\forall x)$$

由此易证对一切n有

$$|\alpha_n|\geqslant\alpha$$

故 $\inf\limits_{n\geqslant1}|\alpha_n|>0$．

7． 设E为Banach空间，T为从E到E中的有界线性算子，设λ，$\mu\in\rho(T)$，则$R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu$（第一预解算子方程）。

证 因为$R_\lambda-R_\mu=(\lambda-T)^{-1}-(\mu-T)^{-1}=(\lambda-T)^{-1}\cdot[(\mu-T)-(\lambda-T)](\mu-T)^{-1}$，所以$R_\lambda-Ru=(\mu-\lambda)\cdot R_\lambda R_\mu$．

或者由$(R_\lambda-R_\mu)(\mu-T)(\lambda-T)=(\mu-T)-(\lambda-T)=\mu-\lambda$，得到

$$R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu$$

8． 设E为Banach空间，T_1、T_2均为E到E中的有界线性算子，且可换，设$\lambda\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$，则$R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(T_1-T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$（第二预解算子方程），其中$R_\lambda(T_j)(j=1,2)$是$T_j$的预解式。

证 $R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(\lambda-T_1)^{-1}[(\lambda-T_2)-(\lambda-T_1)](\lambda-T_2)^{-1}$，由条件$T_1T_2=T_2T_1$可得$T_2R_\lambda(T_1)=R_\lambda(T_1)T_2$．又$T_1R_\lambda(T_1)=R_\lambda(T_1)T_1$显然成立，故

$$R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(T_1-T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$$

或者由 $$[R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)](\lambda-T_2)(\lambda-T_1)=(\lambda-T_2)-(\lambda-T_1)=T_1-T_2$$

立即可得

$$R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(T_1-T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$$

9. 承本章7题，证明$\frac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda=(-1)^n n!R_\lambda^{n+1}$

证 已知$\frac{d}{d_\lambda}R_\lambda=-R_\lambda^2$，用归纳法，设对$n-1$成立，即

$$\frac{d^{n-1}}{d_\lambda^{n-1}}R_\lambda=(-1)^{n-1}(n-1)!R_\lambda^n$$

则

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{d}{d\lambda}R_\lambda^n$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!nR_\lambda^{n-1}(-R_\lambda^2)$$

$$=(-1)^n n!R_\lambda^{n+1}$$

10. 设E是Banach空间，T_λ是定义在复平面的某一非空集G上而在$\mathscr{B}(E)$中取值的抽象函数，适合$T_\lambda-T_\mu=(\mu-\lambda)T_\lambda T_\mu$，又设对$G$中的某个$\lambda$，$T_\lambda^{-1}$存在有界，则$T_\mu^{-1}$对一切$\mu\in G$都存在且有界，而且存在$E$中的有界线性算子$T$，使$T_\mu$是$T$的预解式，$\rho(T)\supset G$。

证 设$\mu\in G$，则

$$T_\lambda=T_\mu+(\mu-\lambda)T_\lambda T_\mu$$

两边左乘T_λ^{-1}便得

$$[T_\lambda^{-1}+(\mu-\lambda)I]T_\mu=I$$

同理由$T_\mu-T_\lambda=(\lambda-\mu)T_\mu T_\lambda$可得

$$T_\lambda=T_\mu+(\mu-\lambda)T_\mu T_\lambda$$

两边右乘T_λ^{-1}，则得

$$T_\mu[T_\lambda^{-1}+(\mu-\lambda)I]=I$$

所以

$$T_\mu^{-1}=T_\lambda^{-1}+(\mu-\lambda)I$$

T_μ^{-1}存在有界。又若令$T=\lambda I-T_\lambda^{-1}\in\mathscr{B}(E)$，则

$$R_\mu(T)=(\mu I-T)^{-1}=[(\mu-\lambda)I+T_\lambda^{-1}]^{-1}=T_\mu$$

故$\rho(T)\supset G$。

11. 设F是复平面上一有界无穷闭集，$\{\alpha_n\}(n=1,2,3,\cdots)$为$F$的一个稠密子集，在$l$中定义算子$T$如下：

$$Tx=y: x=\{\zeta_n\},\quad y=\{\alpha_n\zeta_n\}$$

则每个α_n是T的特征值，$\sigma(T)=F$，$F-\{\alpha_n\}$中的每个点属于T的连续谱。

证 (i) $\lambda=\alpha_n$时，取

$$x_n=\{\underbrace{0,\cdots,0,\zeta_n}_{n\text{ 位}},0,\cdots\}\in l$$

则

$$(\alpha_n I-T)x_n=0$$

故每个α_n是T的特征值。

(ii) $\lambda\overline{\in}F$时，$\inf\limits_{n\geqslant1}|\lambda-\alpha_n|=\alpha>0$，记$T_\lambda=\lambda I-T$，$y=T_\lambda x: \eta_n=(\lambda-\alpha_n)\zeta_n$，则$T_\lambda^{-1}$存在有界，且显然有$T_\lambda$的值域$R(T_\lambda)=l$，所以$\lambda\in\rho(T)$。又因为$\sigma(T)$为闭集，所以$\sigma(T)=\overline{\{\alpha_n\}}=F$。

(iii) $\lambda\in F-\{\alpha_n\}$时，由$(\lambda-T)x=0$，显然可得$x=0$，故$(\lambda-T)^{-1}$存在，但由于$\inf\limits_{n\geqslant1}|\lambda-\alpha_n|=0$，据6题得

T_λ^{-1} 无界。下面证明$\overline{R(T_\lambda)}=l$。令

$$E=\{(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,0,\cdots)\ |m\text{为任一自然数}\}$$

显然E是l的一个稠密子集，但$y\in E$，必存在$x\in l$，使$(\lambda I-T)x=y$，故$\overline{R(T_\lambda)}=l$。从而$\lambda\in F-\{\alpha_n\}$时，有$\lambda\in\sigma_c(T)$（$T$的连续谱）。

12. 在l中定义如下的算子：

$$y=Tx: x=\{\zeta_n\},\quad y=\{\eta_n\};$$

$$\eta_1=0,\quad \eta_k=-\zeta_{k-1}\ (k\geqslant 2)$$

证明T没有特征值，$\rho(T)$由一切满足$|a|>1$的点组成，且$\|R_\lambda\|=(|\lambda|-1)^{-1}$。

证 (i) 因为

$$(\lambda-T)x=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\zeta_1=0\\ \lambda\zeta_k+\zeta_{k-1}=0 \qquad (k=2,3,\cdots)\end{cases}$$

$\lambda\neq 0$时，必有$0=\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\cdots$，$\lambda=0$时，显然有$x=0$。故$\lambda$为任何数，均有$x=0$，即$T$没有特征值。

(ii) $|\lambda|>1$时，因为$\|T\|=1$，则据参考文献[2] $p96$定理2.10有$\lambda\in\rho(T)$，且$\|R_\lambda\|\leqslant(|\lambda|-1)^{-1}$。

(iii) $|\lambda|<1$时，

$$\|(\lambda-T)x\|=|\lambda|\cdot|\zeta_1|+|\lambda\zeta_2+\zeta_1|+|\lambda\zeta_3+\zeta_2|+\cdots$$

$$\geqslant|\zeta_1|-|\lambda|\cdot|\zeta_1|+|\zeta_2|-|\lambda|\cdot|\zeta_2|$$

$$+|\zeta_3|-|\lambda|\cdot|\zeta_3|+\cdots=(1-|\lambda|)\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|$$

因为$1-|\lambda|>0$，故$(\lambda-T)^{-1}$存在有界，但易知$|\lambda|<1$时，$R(T_\lambda)\neq l$，所以$\lambda\in\sigma_\gamma(T)$（剩余谱），从而

$$\sigma(T)=\{\lambda|\ |\lambda|\leqslant 1\ \},\quad \rho(T)=\{\lambda|\ |\lambda|>1\}$$

（iv）最后证明 $\|R_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|-1}$。因为

$$R_\lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n x$$

现取 $x = (1,0,0,\cdots)$，$\|x\| = 1$，则

$$\|R_\lambda x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda|-1}$$

于是 $\|R_\lambda\| \geqslant \frac{1}{|\lambda|-1}$，从而 $\|R_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|-1}$。

18. 设有无穷阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

由 A 定义了 l^p 上的有界线性算子 $T: y = Tx$，其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$，$y = \{\xi_2, \xi_3, \cdots\}$。证明 $\rho(T)$ 由满足 $|\lambda| > 1$ 的一切点 λ 组成，T 的特征值由满足 $|\lambda| < 1$ 的一切点组成，对于 $|\lambda| = 1$，$\lambda I - T$ 是一一对应的。

证 （i）$\|T\| = 1$ 显然，所以 $|\lambda| > 1$ 时，$\lambda \in \rho(T)$。

（ii）$|\lambda| < 1$ 时，

$$(\lambda I - T)x = 0 \Leftrightarrow \{\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_{n+1}, \cdots\} = \lambda\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$$

它有非零解

$$x = \xi_1\{1, \lambda, \lambda^2, \cdots\} \in l^p \quad (\xi_1 \neq 0)$$

故 $|\lambda| < 1$ 时，$\lambda \in \sigma_p(T)$（特征值）。从而

$$\sigma(T) = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}, \quad \rho(T) = \{\lambda \mid |\lambda| > 1\}$$

(iii) $|\lambda|=1$时，由$(\lambda-T)x=0$可知x必具有形式

$$\zeta_1\{1,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \cdots\}$$

故当且仅当$\zeta_1=0$时有$x\in l^p$，所以在l^p中$(\lambda-T)x=0$只有零解，即$|\lambda|=1$时，$(\lambda I-T)$是一一对应的。

14. 设T是定义在Banach空间上的有界线性算子，$\alpha\in\rho(T)$，$A=R_\alpha$，设μ，λ满足$\mu(\alpha-\lambda)=1$，则$\mu\in\sigma(A)$的充要条件是$\lambda\in\sigma(T)$。又设$\mu\in\rho(A)$，且$\mu(\alpha-\beta)=1$，则

$$(\mu I-A)^{-1}=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}R_\beta$$

证 设$\lambda\in\rho(T)$，$\mu(\alpha-\lambda)=1$，则$(\alpha I-T)(\lambda-T)^{-1}\in\mathscr{B}(E)$，而

$$(\alpha I-T)(\lambda I-T)^{-1}=A^{-1}[(\alpha I-T)-\frac{I}{\mu}]^{-1}$$

$$=\left\{\left[(\alpha I-T)-\frac{I}{\mu}\right]\cdot A\right\}^{-1}$$

$$=\left(\frac{\mu I-A}{\mu}\right)^{-1}=\mu(\mu I-A)^{-1} \qquad (*)$$

所以$\mu\in\rho(A)$。

反之，若$\mu\in\rho(A)$，由$\mu(\alpha-\lambda)=1$，$\mu\neq0$，则

$$(\mu I-A)^{-1}A=[A^{-1}(\mu I-A)]^{-1}=(\mu A^{-1}-I)^{-1}$$

$$=[\mu(\lambda I-T)]^{-1}=\frac{I}{\mu}(\lambda I-T)^{-1}$$

故$\lambda\in\rho(T)$，所以

$$\mu\in\sigma(A)\Leftrightarrow\lambda\in\sigma(T)$$

现设$\mu\in\rho(A)$，$\mu(\alpha-\beta)=1$，则$\beta\in\rho(T)$，由$(*)$立即可得

$$(\beta I - T)^{-1} = \mu A(\mu I - A)^{-1}$$
$$= \mu[-(\mu I - A) + \mu I](\mu I - A)^{-1}$$
$$= \mu^2(\mu I - A)^{-1} - \mu I$$

所以 $$(\mu I - A)^{-1} = \frac{I}{\mu} + \frac{R_\beta}{\mu^2}$$

15. 设无穷阵(α_{kj})适合条件$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}} < +\infty$$

作算子T如下：

$$y = Tx: \eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj}\zeta_j \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

其中$x = \{\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n, \cdots\}$，$y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$，证明$T$是$l^p$到$l^p$的有界性算子。

证 设$x = \{\zeta_j\} \in l^p$，则由Hölder不等式可得

$$\|Tx\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{kj}\zeta_j\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\zeta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|$$

所以$Tx \in l^p$，且T有界。

16. 设T是由赋范线性空间E到赋范线性空间E_1的线性算子，$N = \{x: Tx = 0\}$，称N为T的零空间。证明当T有界

时，N是E的闭子空间。反之，若N是E的闭子空间，问T是否有界，如果不成立，试举出例子。

证 N为E的线性子空间显然，现设$x\in\overline{N}$，则存在$x_n\in N$，使$x_n\longrightarrow x$，因为T连续，则

$$Tx=\lim_{n\to\infty}Tx_n=0$$

所以$x\in N$，N为闭子空间。

反之不一定成立，例如取$E=C^1[a,b]$，$E_1=C[a,b]$，T由下式定义：

$$Tx(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

T无界，易知

$$N=\{x(t):Tx=0\}=\{x(t):x(t)=c,\ \ c\in R^1\}$$

它是$C^1[a,b]$中的闭集。

但是，我们可以证明若T是闭线性算子，则必有N为闭子空间。

17. 设E为Banach空间，$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E)$ $(n=1, 2, \cdots)$依算子范数收敛于$T\in\mathscr{B}(E)$，λ_0是T的正则值，则当n充分大时，λ_0也是T_n的正则值，且

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0I-T_n)^{-1}=(\lambda_0I-T)^{-1}$$

证 由于

$$(\lambda_0I-T_n)=[I-(T_n-T)(\lambda_0I-T)^{-1}](\lambda_0I-T)$$

$T_n\longrightarrow T(n\to\infty)$，则对$0<\varepsilon<1$，存在$N$，当$n>N$时，有

$$\|(T_n-T)(\lambda_0I-T)^{-1}\|\leqslant\varepsilon<1$$

故当$n>N$时，

$$(\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} [(T_n - T)(\lambda_0 I - T)^{-1}]^m$$

$(\lambda_0 I - T_n)^{-1} \in \mathscr{B}(E)$，即$n > N$时，$\lambda_0 \in \rho(T_n)$，且有

$$\|(\lambda_0 I - T_n)^{-1} - (\lambda_0 I - T)^{-1}\|$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \|T_n - T\|^m \cdot \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^m$$

$$= \frac{\|T_n - T\| \cdot \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}{1 - \|T_n - T\| \cdot \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1}$$

18. 设E为Banach空间，$T \in \mathscr{B}(E)$，设μ_0是T^n的特征值，则μ_0的n次方根中至少有一个是T的特征值。

证 设$\lambda^n - \mu_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$，其中$\lambda_i^n = \mu_0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$T^n - \mu_0 I = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)\cdots(T - \lambda_n)$$

因为μ_0是T^n的特征值，所以存在$x \in E$，$x \neq 0$，使

$$(T^n - \mu_0 I)x = 0$$

即

$$(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)\cdots(T - \lambda_n)x = 0$$

故至少有一个λ_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）是$T$的特征值。

19. 设f是定义在$C[a,b]$上的线性泛函，而且对$C[a,b]$中一切满足$x(t) \geqslant 0$的函数有$f(x) \geqslant 0$，证明f连续，于是进一步证明存在$[a, b]$上的单调上升函数$v(t)$，使

$$f(x) = \int_a^b x(t) dv(t)$$

证 令$x_0(t)\equiv 1$，则对一切$x(t)\in C[a,b]$，当$\|x\|\leqslant 1$时，有$x_0(t)\pm x(t)\geqslant 0$，所以

$$f(x_0\pm x)\geqslant 0$$

则

$$|f(x)|\leqslant f(x_0) \qquad (\text{当}\|x\|\leqslant 1\text{时})$$

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|\leqslant f(x_0)$$

故f为$C[a,b]$上的有界线性泛函，且$\|f\|=f(x_0)$，从而

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (\forall x(t)\in C[a,b])$$

其中$v(t)$为右连续的囿变函数。下面我们证明$v(t)$为单调上升函数。

证法一 任取$a<t_1<t_2<b$，并设t_1，t_2为$v(t)$的连续点，作$C[a,b]$中的函数数$x(t)$如下：

$$x(t)=\begin{cases}1 & t\in[t_1,\ t_2]\\ 0 & t\in[a,\ t_1-\frac{1}{n}]\cup[t_2+\frac{1}{n},\ b]\\ \text{线性函数} & t\in[t_1-\frac{1}{n},\ t_1]\cup[t_2,\ t_2+\frac{1}{n}]\end{cases}$$

$x(t)\geqslant 0$，故

$$0\leqslant f(x)=\int_a^b x(t)dv(t)=\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_2+\frac{1}{n}} x(t)dv(t)$$

$$=x(t)v(t)\Big|_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_2+\frac{1}{n}}-\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_2+\frac{1}{n}} v(t)dx(t)$$

$$= -n\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_1} v(t)dt + n\int_{t_2}^{t_2+\frac{1}{n}} v(t)dt$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}}\left[\int_a^{t_2+\frac{1}{n}} v(t)dt - \int_a^{t_2} v(t)dt\right]$$

$$- \frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\left[\int_a^{t_1-\frac{1}{n}} v(t)dt - \int_a^{t_1} v(t)dt\right]$$

上式中令$n \longrightarrow \infty$，使得

$$v(t_2) \geqslant v(t_1)$$

再利用$v(t)$的右连续性知对一切$a<t_1<t_2<b$有

$$v(t_2) \geqslant v(t_1)$$

类似地可证明

$$v(a) \leqslant v(t) \leqslant v(b) \qquad (a<t<b)$$

故$v(t)$是$[a,\ b]$上的单调上升函数。

证法二 利用LS积分性质，任取$a<t_1<t_2\leqslant b$，令

$$x(t) = \chi_{(t_1,t_2]}^{(t)} \text{——}(t_1,\ t_2]\text{上的特征函数}$$

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & t \in [a,\ t_1] \cup [t_2 + \frac{1}{n},\ b] \\ 1 & t \in [t_1 + \frac{1}{n},\ t_2] \\ \text{线性函数} & \text{其它} \end{cases}$$

则 $x_n(t) \in C[a,b]$，$0 \leqslant x_n(t) \leqslant 1$，且 $x_n(t) \longrightarrow x(t)$，据Lebesgue控制收敛定理可得

$$(LS)\int_a^b \chi_{[t_1,t_2]} dv(t) \geqslant \theta$$

即

$$v(t_2) \geqslant v(t_1)$$

同理可证

$$v(t) \geqslant v(a) \qquad (\forall t > a)$$

故$v(t)$是$[a, b]$上的单调上升函数。

20. 证明无穷维赋范线性空间的共轭空间是无穷维的。

证 设E为无穷维，而E^*为有穷维赋范线性空间，容易证明$(E^*)^*$与R^n等距同构，此处n为E^*的维数，故E^{**}也是n维的。设J为E到E^{**}中的自然嵌入映射，则$JE \subset E^{**}$，JE是无穷维的。矛盾，故E^*为无穷维。

21. 证明Banach空间E为自反的充要条件是E^*为自反的。

证 设E自反，任取$\varphi \in E^{***}$，定义$f \in E^*$如下：

$$f(x) = \varphi(Jx) \qquad (\forall x \in E)$$

因为任一$x^{**} \in E^{**}$，有$x \in E$，使$x^{**} = Jx$，则由$\varphi(x^{**}) = \varphi(Jx) = f(x) = x^{**}(f)$得$\varphi = J_1 f$，其中$J_1$为$E^* \longrightarrow E^{***}$的自然嵌入映象，故$E^*$自反。

现设E^*自反，但$E \not\cong E^{**}$，我们记

$$\widehat{E} = \{F_x \in E^{**}: x \in E,\ F_x = Jx\} = \{\widehat{x}: x \in E\}$$

因为E完备，则$\widehat{E}$是E^{**}的真闭子空间，由Hahn—Banach定理，必存在$\varphi \in E^{***}$，使

$$\varphi \neq 0,\ \varphi(\widehat{x}) = 0 \qquad (\forall \widehat{x} \in \widehat{E})$$

因为$E^* = E^{***}$，则$\varphi = J_1 f$，其中$f \in E^*$，$\|\varphi\| = \|f\|$. 由于

$$\varphi(\widehat{x}) = J_1 f(\widehat{x}) = \widehat{x}(f) = f(x)$$

故

$$f(x)=0 \quad (\forall x\in E), \quad f=0$$

矛盾，从而E必自反。

22. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的。

证 设E^n为n维赋范线性空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是它的一组基底，据[2]定理3.1推论2我们可作出$(E^n)^*$中的元组$\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$如下：

$$e_i'(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

任取$x\in E^n$， $x=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j e_j$，则

$$e_i'(x)=\zeta_i$$

容易证明$\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$是$(E^n)^*$的一组基底，故$(E^n)^*$是$n$维的，于是$(E^n)^{**}$也是$n$维的。$J(E^n)\subset(E^n)^{**}$，$J(E)^n$是$n$维的，故$J(E^n)=(E^n)^{**}$，即$E^n$自反。

23. 设E为复的赋范线性空间，$f\in E^*$，已知f可表为

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)$$

其中φ为E上的实齐性实线性泛函，证明$\|\varphi\|=\|f\|$。

证 不妨设$f\neq 0$，$f(x)=e^{i\theta}|f(x)|$，因为φ为实泛函，则

$$|f(x)|=e^{-i\theta}f(x)=f(e^{-i\theta}x)=\varphi(e^{-i\theta}x)$$

故

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{\|x\|=1}|\varphi(e^{-i\theta}x)|$$

$$=\sup_{\|y\|=1}|\varphi(y)|=\|\varphi\|$$

24. 设$v(t)\in V[a, b]$，已知由

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t)$$

定义了$C[a,b]$上的一个有界线性泛函f. 举例说明，存在这样的$v(t)$使$\|f\|<\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$.

解 由$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t)$立即可知$\|f\|\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$，我们令$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|v(x)|$，任取一点$c\in(a, b)$以及$\varepsilon>0$，作函数

$$v_1(t)=\begin{cases} v(t) & t\neq c \\ 3M+\varepsilon & t=c \end{cases}$$

则

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t)=\int_a^b x(t)dv_1(t)$$
$$(\forall x(t)\in C[a,b])$$

但显然有$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v_1)\geqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)+2\varepsilon$，故$\|f\|<\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v_1)$.

25. 求出l，C，C_0上有界线性泛函的一般形式。

解 (1) 求l^*：任取$x=\{\xi_k\}\in l$，显然有

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \qquad (\text{在}l\text{中收敛})$$

其中$e_k=\{\overbrace{0,0,\cdots,0,1}^{k\text{位}},0,\cdots\}$。任取$f\in l^*$，令

$$C_k=f(e_k), \qquad a=\{C_k\}$$

则

$$|C_k|\leqslant\|f\|$$

故$a=\{C_k\}\in l^{\infty}$，且$\|a\|_{\infty}\leqslant\|f\|$，利用$f$的连续性，可得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{k=1}^{n}\zeta_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k C_k$$

则

$$|f(x)|\leqslant\|a\|_{\infty}\cdot\|x\| \qquad (\forall x\in l)$$

$$\|f\|\leqslant\|a\|_{\infty}$$

故

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k C_k \text{ 且 } \|f\|=\|a\|_{\infty}$$

反之，任取$a=\{C_k\}\in l^{\infty}$，令$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\zeta_k$，则显然有$f\in l^*$，故 $l^*=l^{\infty}$。

（2）求 C^*：$e_k\in C$，再令$e=(1,1,1,\cdots)\in C$，任取$x=\{\zeta_k\}\in C$，设$\alpha=\lim_{n\to\infty}\zeta_k$，则可以证明

$$x=\alpha e+\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_k-\alpha)e_k \text{（在 } C \text{ 中收敛）}$$

任取$f\in C^*$，令 $f(e_k)=C_k$ $(k=1,2,3,\cdots)$，$f(e)=C'$，则

$$f(x)=\alpha C'+\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta_k-\alpha)C_k \qquad (1)$$

取$x_N=\{\zeta_i^{(N)}\}$，其中

$$\zeta_i^{(N)}=\begin{cases}\operatorname{sgn} C_i & (i\leqslant N)\\ 0 & (i>N)\end{cases}$$

则

$$f(x_N)=\sum_{k=1}^{N}|C_k|$$

可不妨设存在$C_k\neq 0$，则

$$\sum_{k=1}^{N}|C_k|=|f(x_N)|\leqslant\|f\|$$

（对充分大的自然数N成立）

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|<+\infty \tag{2}$$

令$C_0=C'-\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k$，则(1)式可改写成

$$f(x)=\alpha C_0+\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k C_k \tag{3}$$

反之，任取数列C_0，C_1，C_2，…，满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|C_k|<+\infty$，令

$$f(x)=\alpha C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\zeta_k$$

其中$\alpha=\lim\limits_{k\to\infty}\zeta_k$，易证$f\in C^*$，且

$$\|f\| \leqslant |C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \tag{4}$$

另一方面，取 $x_N = \{\zeta_i^{(N)}\}$，其中

$$\zeta_i^{(N)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} C_i & (i \leqslant N) \\ \operatorname{sgn} C_0 & (i > N) \end{cases}$$

不妨设存在$C_k \neq 0$，则

$$\|x_N\| = 1, \quad \lim_{i \to \infty} \zeta_i^{(N)} = \operatorname{sgn} C_0$$

从而

$$f(x_N) = |C_0| + \sum_{k=1}^{N} |C_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k \operatorname{sgn} C_0$$

$$|C_0| + \sum_{k=1}^{N} |C_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k \operatorname{sgn} C_0 \leqslant \|f\|$$

令$N \to \infty$，使得

$$|C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \leqslant \|f\| \tag{5}$$

由(4)，(5)知

$$\|f\| = |C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$$

故

$$l = C^*, \quad f \in C^*$$

$$f \longleftrightarrow \{C_0, C_1, C_2, \cdots\} = \{C_0, f(e_1), \ f(e_2), \cdots\}$$

$$C_0 = f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k$$

反之，任取$b\in l$，$b\longleftrightarrow f\in C^*$，其中

$$f(x)=b_1\lim_{k\to\infty}\zeta_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+1}\zeta_k$$

(3) 求C_0^*：任取$f\in C_0^*$，令$C_k=f(e_k)$，因为$x=\{\zeta_k\}\in C_0$时，有$x=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k e_k$，所以$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\zeta_k$。下面证明$\{C_k\}\in l$，事实上，对一切自然数$N$，取$x_N=\{\zeta_i^{(N)}\}$，其中

$$\zeta_i^{(N)}=\begin{cases}\operatorname{sgn}C_i & (i\leqslant N)\\ 0 & (i>N)\end{cases}$$

不妨设$\|x_N\|=1$，$x_N\in C_0$显然，则

$$f(x_N)=\sum_{i=1}^{N}|C_i|$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|\leqslant\|f\|$$

另一方面，任取$\{C_k\}\in l$，我们令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k C_k\qquad(\forall x=\{\zeta_k\}\in C_0)$$

易知$f\in C^*_0$，且$\|f\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$，从而$C_0^*=l$，且$\|f\|=\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$。

26. 求出$L[a,b]$上有界线性泛函的一般形式。

解 不妨设$[a,b]=[0,1]$，任取$f\in L^*[0,1]$，设$p>1$，

因为 $x(t)\in L^p[0,1]$时，有

$$\int_0^1 |x(t)|dt\leqslant\left\{\int_0^1 |x(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

故f 可作为$L^p[0,1]$上的有界线性泛函，据参考文献[2] $p108$ 定理3.3，存在$y_p(t)\in L^q[0,1]$ ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)，使

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y_p(t)dt \qquad (\forall x(t)\in L^p[0,1]) \quad (*)$$

当$1<p_1<p_2$时，$L^{p_2}[0,1]\subset L^{p_1}[0,1]$，$\forall x(t)\in L^{p_2}[0,1]$，有

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y_{p_1}(t)dt=\int_0^1 x(t)y_{p_2}(t)dt$$

于是据泛函数所对应函数的唯一性，得

$$y_{p_1}(t)=y_{p_2}(t)$$

故$y_p(t)$与p无关，记为$y(t)$，易知

$$\left\{\int_0^1 |y(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\| \qquad (\forall q>1)$$

令$q\longrightarrow\infty$，得

$$\lim_{q\to\infty}\left\{\int_0^1 |y(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

故$y(t)\in L^\infty[0,1]$，且

$$\|y\|_\infty\leqslant\|f\|$$

现设 $x(t)\in L[0,1]$，据参考文献[1]第五章引理2.1，必存在有界可测函数列$x_n(t)$，使

$$\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|dt\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

由(*)知

$$f(x_n)=\int_0^1 x_n(t)y(t)dt$$

因为$|x_n(t)|\leqslant|x(t)|$,利用Lebesgue控制收敛定理及f的连续性,

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y(t)dt$$

另一方面，任取 $y(t)\in L^\infty[0,1]$，令

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y(t)dt \qquad (x(t)\in L[0,\ 1])$$

则f是$L[0,\ 1]$上的有界线性泛函，且

$$\|f\|\leqslant\|y\|_\infty$$

故

$$\|f\|=\|y\|_\infty,\quad L^*[0,1]=L^\infty[0,1]$$

27. 证明$(l^p)^*=l^q$ $(1<p<+\infty,\ q=p(p-1)^{-1})$.

本题可参阅刘斯铁尔尼克著的“泛函分析概要”$P188$—$P189$或者复旦大学编“实变与泛函”下册$P137$—$P138$.

28. 试证泛函$f(v)=\int_0^{\frac{1}{2}}dv(t)$是空间$V_0[0,\ 1]$上的有界线性泛函，其中$v\in V_0[0,1]$。这里$V_0[0,1]=\{g(x)$：$g(0)=0$，在$(0,1)$上右连续的囿变函数$\}$。

29. 试从题28作出结论：$C[0,1]$不是自反空间。

证 由28题知$f(v)=\int_0^{\frac{1}{2}}dv(t)$所定义的泛函$f\in C^{**}[0,1]$，若$C[0,1]$自反，则存在$x(t)\in C[0,1]$，使

$$f(v)=\int_0^1 x(t)dv(t)=\int_0^{\frac{1}{2}}dv(t)$$

对一切$v(t)\in V_0[0,1]$成立，从而可得

$$x(t)=\begin{cases}1 & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ 0 & x\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

这与$x(t)\in C[0,1]$矛盾，故$C[0,1]$不是自反空间。

30. 如果E是无穷维赋范线性空间，则在E上存在不连续的线性泛函。

解 设$B\subset E$是E的Hamel基，因为E是无穷维的，故B是无穷集，任取$\{x_n\}\subset B$，定义E上的线性泛函如下：

$$f(x_n)=n\|x_n\| \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$f(x)=0 \qquad x\in B-\{x_n\}$$

任取$x\in E$，$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$（$y_i\in B, i=1,2,\cdots,n$），令

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(y_i)$$

易知f是E上的不连续线性泛函。

31. 设E_0是赋范线性空间，不完备，E是E_0的完备化空间，则$E_0^*=E^*$.

证 任取$f\in E_0^*$，定义$\tilde{f}\in E^*$如下：$x\in E_0$时，$\tilde{f}(x)=f(x)$，$x\in E-E_0$时，$\tilde{f}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$，其中$x_n\in E_0$，$x_n\to x(n\to\infty)$。显然$\tilde{f}$是由$f$唯一确定的，且$\|\tilde{f}\|=\|f\|$，我们令

$$Tf=\tilde{f} \qquad (f\in E_0^*)$$

则T是E_0^*到E^*中的等距同构映象。另一方面，对任一$\phi\in E^*$，令$f=\varphi/E_0$，则$f\in E_0^*$，显然$Tf=\phi$，故T是E_0^*

到E^*上的等距同构映象，即

$$E_0^* = E^*$$

32. 试证明$C[a,b]$中的算子序列 $A_n x(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}})$ 强收敛于恒同算子，但不是依算子范数收敛。

证 任取$x(t)\in C[0,1]$，对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$t_1,t_2\in[0,1]$，$|t_1-t_2|<\delta$时，有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$$

取$\delta_0>0$，$\delta_0<\frac{\delta}{2}$，则$t\in[0, \delta_0]$时，

$$|t^{1+\frac{1}{n}}-t|<2t<\delta \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

从而当$t\in[0, \delta_0]$时，对所有自然数n，有

$$|A_n x(t)-x(t)|=|x(t^{1+\frac{1}{n}})-x(t)|<\varepsilon$$

当 $t\geqslant\delta_0$时，存在N，使得$n>N$时，有

$$|t^{1+\frac{1}{n}}-t|<\delta$$

于是$n>N$时，对一切$t\in[0, 1]$，有

$$|x(t^{1+\frac{1}{n}})-x(t)|)<\varepsilon$$

故A_n强收敛于恒同算子 I。

下面我们证明$\|A_n-I\|$不收敛于零。取定 $t_0\in(0, 1)$，对每个n，我们作$C[0,1]$中函数$x_n(t)$如下：

$$x_n(t)=\begin{cases} 0 & t\in[0, t_0^{1+\frac{1}{n}}] \\ 1 & t\in[t_0, 1] \\ \text{线性} & t\in[t_0^{1+\frac{1}{n}}, t_0] \end{cases}$$

则

$$\|x_n\| = 1$$

$$\|A_n - I\| \geqslant \|(A_n - I)x_n\| \geqslant |x_n(t_0^{1+\frac{1}{n}}) - x_n(t_0)| = 1$$

故A_n按算子范数不收敛于I。

33. Banach空间E称为具有可列基$\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$，如果每个$x \in E$可唯一地表成$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n x_n$。证明

(i) $\{x_n\}$中的任意有限个都是线性无关的；

(ii) 令$f_n(x) = C_n\ (n = 1,2,3,\cdots)$，这里$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n x_n$，则$f_n$是$E$上的有界线性泛函；

(iii) 令W为使$\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n x_n$在$E$中收敛的序列$\{C_n\}$的全体，在$W$中定义范数

$$\|w\| = \sup_m \left\|\sum_{n=1}^{m} C_n x_n\right\| \qquad (w \in W)$$

则W为Banach空间；

(iv) 证明E是可分的。

证 (i)显然成立，我们先证明(iii)，首先W显然是赋范线性空间，只要证明W的完备性。任取$w_k = \{C_n^{(k)}\}$为W中基本列，则$\forall \varepsilon > 0$，存在N，当$k > N$时，对一切自然数p有

$$\|w_{k+p} - w_k\| = \sup_m \left\|\sum_{n=1}^{m} (C_n^{(k+p)} - C_n^{(k)})\ x_n\right\| < \varepsilon \qquad (*)$$

从而知

$$C_n^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} C_n \quad (\forall n)$$

令$w=\{C_n\}$，下面证明$w\in W$，且$w_k \xrightarrow[k\to\infty]{} w$。由(*)对任一自然数$m$，当$k>N$时，有

$$\left| \sum_{n=1}^{m} (C_n^{(k+p)} - C_n^{(k)}) x_n \right| < \varepsilon \quad (\forall p)$$

令$p \longrightarrow \infty$，得

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(k)} - C_n) x_n \right| \leqslant \varepsilon \qquad (k>N)$$

从而对任意的自然数n_1，n_2成立：

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} (C_n^{(k)} - C_n) x_n \right| \leqslant 2\varepsilon \quad (k>N)$$

故

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n x_n \right| \leqslant 2\varepsilon + \left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n^{(k)} x_n \right| \quad (k>N)$$

固定$h>N$，由于$w_k\in W$，则存在N_1，当n_1，$n_2>N_1$时，有

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n^{(k)} x_n \right| \ \varepsilon$$

所以n_1，$n_2>N_1$时，有

$$\left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n x_n \right| < 3\varepsilon$$

故$w=(C_n)\in W$，且$w_k \longrightarrow w (k\to\infty)$，$W$完备得证。

(ii) 作$W \longrightarrow E$上的映射T如下：

$$w=(C_n)\in W,\ Tw=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx_n$$

因为对任意的自然数m有

$$\|w\|\geqslant\left\|\sum_{n=1}^{m}C_nx_n\right\|$$

所以

$$\|w\|\geqslant\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{m}C_nx_n\right\|=\|Tw\|$$

故$\|T\|\leqslant 1$.又因为T一对一，据逆算子定理$T^{-1}\in\mathscr{B}(E,W)$。现设

$$x^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{(k)}x_n,\quad x^{(k)}\longrightarrow 0\quad(k\to\infty)$$

则

$$w^{(k)}=T^{-1}x^{(k)}\longrightarrow 0\quad(k\to\infty)$$

从而容易证明对$\forall n$，有

$$C_n^{(k)}\longrightarrow 0\quad(k\to\infty)$$

即

$$f_n(x^{(k)})\longrightarrow 0\quad(k\to\infty)(n=1,2,3,\cdots)$$

故f_n是E上的有界线性泛函。

(iv) 因为集合$\left\{\sum_{n=1}^{m}r_nx_n\,\middle|\,m\text{为任一自然数，}r_n(n=1,2,\cdots,m)\text{均为有理数}\right\}$是$E$中的可数稠子集，故$E$可分。

34. 设 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}\in l^p(n=1,2,3,\cdots)$，则$\{x_n\}$弱收

敛于$x=\{\xi_k\}\in l^p$的充要条件是$\sup\limits_{n\geq 1}\|x_n\|<+\infty$，且对每个$k$，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$。

证 必要性：设$x_n\xrightarrow{w}x$，则据共鸣定理易知

$$\sup_n\|x_n\|<+\infty$$

我们只要证明对每个k，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$，取

$$f\longleftrightarrow\{\overbrace{0,\ 0,\ \cdots,0,\ 1}^{k位},\ 0,\cdots\}\in l^q=(l^p)^*$$

则

$$f(x_n)=\xi_k^{(n)},\quad f(x)=\xi_k$$

因为$x_n\xrightarrow{w}x$，所以

$$\xi_k^{(n)}\longrightarrow\xi_k\quad(n\to\infty)$$

充分性：设$p>1$，x，$x_n\in l^p=(l^q)^*$，取$e_n\in l^q$，对任一自然数m显然有$y=\sum\limits_{k=1}^{m}\eta_k e_k\in l^q$，因为$\xi_k^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\xi_k$，故$x_n(y)\xrightarrow[n\to\infty]{}x(y)$，由于$\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}\eta_k e_k\right\}$全体在$l^q$中稠密，利用条件$\{\|x_n\|\}$一致有界立即得$x_n\xrightarrow[l^p]{w}x\ (p>1)$。

当$p=1$时，结论不一定成立。例如取$e_n\in l$，其中$e_n=\{\xi_k^{(n)}\}=\{\overbrace{0,\cdots,\ 0,\ 1}^{n位},\ 0,\cdots\}$，显然满足条件$\|e_n\|=1$，

对每个k, $\xi_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。但对于$f \longleftrightarrow \{a_i\} \in l^\infty$，其中$a_i$不收敛于零($i\to\infty$)，则$f(e_n)=a_n$不收敛于零($n\to\infty$)，所以$\{e_n\}$在$l^1$中不弱收敛于零。

35. 证明l中点列的弱收敛与强收敛等价。

证 设$x_n \xrightarrow{w} x$，不妨设$x=0$，则对一切$y=\{a_i\}\in l^\infty$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

此处$x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$。我们要证明$x_n \xrightarrow{强} 0$，即

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

设不然，存在$\varepsilon_0>0$及$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

不妨设上面的不等式对一切n都成立。因为$x_n\in l$，故对每个n都有

$$\sum_{i=k}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty)$$

又因为$x_n \xrightarrow{w} 0$，故对每一个i有

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = 0$$

则若取定i_1，必存在n_1，使

$$\sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n_1)}| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

因为$\{\zeta_i^{(n_1)}\}\in l$，必存在$i_2>i_1$，使

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty}|\zeta_i^{(n_1)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}$$

故

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2}|\zeta_i^{(n_1)}|>\frac{3\varepsilon_0}{5}$$

对于i_2，又存在$n_2>n_1$，使

$$\sum_{i=1}^{i_2}|\zeta_i^{(n_2)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}$$

重复上述步骤，得$i_3>i_2$，使

$$\sum_{i=i_2+1}^{i_3}|\zeta_i^{(n_2)}|>\frac{3\varepsilon_0}{5}$$

一般地可得$i_k>i_{k-1}$及$n_k>n_{k-1}$（$k=2,3,\cdots$），使

$$\sum_{i=1}^{i_k}|\zeta_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_{k+1}}^{\infty}|\zeta_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}}|\zeta_i^{(n_k)}|>\frac{3\varepsilon_0}{5}$$

我们令

$$a_i=\begin{cases}0 & 1\leqslant i\leqslant i_1\\ \operatorname{sgn}\zeta_i^{(n_k)} & i_k<i\leqslant i_{k+1}\ (k=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

则 $\{a_i\}\in l^{\infty}$，而

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\zeta_i^{(n_k)} = \sum_{i=1}^{i_k} a_i\zeta_i^{(n_k)} + \sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} a_i\zeta_i^{(n_k)}$$

$$+\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty} a_i\zeta_i^{(n_k)} \geqslant -\sum_{i=1}^{i_k}|\zeta_i^{(n_k)}| + \sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}}|\zeta_i^{(n_k)}|$$

$$-\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty}|\zeta_i^{(n_k)}| > \frac{\varepsilon_0}{5}$$

对任何自然数k成立，这与$x_{n_k}\xrightarrow{w}0$ 矛盾，故一定有 $x_n\xrightarrow{\text{强}}0$。

36. Banach空间E称为序列弱完备的，是指若对每个$f\in E^*$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在，则存在$x\in E$使$\{x_n\}$弱收敛于$x$。

证明：

(i) 自反空间都是序列弱完备的；

(ii) $L[a,b]$，l是序列弱完备的；

(iii) $C[a,b]$不是序列弱完备的。

证 (i) 设$E=E^{**}$，并设对一切$f\in E^*$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在，记$x_n^{**}=Jx_n$（$J$为$E\to E^{**}$的自然嵌入映像），则$x_n^{**}(f)=f(x_n)$对一切$f\in E^*$收敛，由共鸣定理知存在$x^{**}\in E^{**}$，使

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{**}(f)=x^{**}(f) \qquad (\forall f\in E^*)$$

令$x^{**}=Jx$，就得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \qquad (\forall f\in E^*)$$

故$x_n \xrightarrow{w} x$，E序列弱完备。

(ii) 对于$L[a,b]$，据 Yosida 著 "泛函分析"（第5版）p121定理 4："设$\{x_n\}\subset L[a,b]$，则$x_n \xrightarrow{w} x\in L[a,b]$的充要条件是：(a) $\sup_n \|x\| < +\infty$，(b)对任一可测集$B\subset[a,b]$，$\lim_{n\to\infty}\int x_n(t)dm$存在有限。"

现设对一切$f\in L^*[0,1]=L^\infty[0,1]$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$存在有限，即$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)f(t)dm$存在有限，取

$$f(t)=\chi_B(t)\in L^\infty[0,1]$$

则可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_B x_n(t)dm \text{ 存在有限}$$

又据共鸣定理，$\{\|x_n\|\}$有界，再利用上面的定理，则存在$x(t)\in L[a,b]$，使$x_n \xrightarrow{w} x$，故$L[a,b]$序列弱完备。

对于l，利用$l=L(N, \mathscr{B}, m)$，其中N为自然数集，$\mathscr{B}$为N的一切子集组成的集类，$B\in\mathscr{B}$时，$mB=B$中含有自然数的个数，故l也是序列弱完备的（据Yosida著"泛函分析"第5版p121定理4）。也可以直接证明。设$x_n=\{\zeta_i^{(n)}\}\in l$，对任一$f\in l^\infty$，$\{f(x_n)\}$收敛，则由共鸣定理知$\{\|x_n\|\}$有界，且对每个$i$，$\lim_{n\to\infty}\zeta_i^{(n)}=\zeta_i$，以及对每个

$f\in l^{\infty}$，$\{f(x_n)\}$收敛。记$x=\{\zeta_i\}$，易证$x\in l$，故不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_i^{(n)}=0(\forall i)$。则$f\longleftrightarrow\{a_i\}\in l^{\infty}$，$\{f(x_n)\}=\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\zeta_i^{(n)}\right\}$为Cauchy点列。我们来证明$\{x_n\}$为$l$中基本列。设不然，则存在$\varepsilon_0>0$以及子序列$\{n_k\}$，$\{p_{n_k}\}$($n_k$，$p_{n_k}$均为自然数)，使

$$\|x_{n_k+p_{n_k}}-x_{n_k}\|=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\zeta_i^{(n_k+p_{n_k})}-\zeta_i^{(n_k)}\right|\geqslant\varepsilon_0$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

不妨设

$$\|x_{n+p_n}-x_n\|=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\zeta_i^{(n+p_n)}-\zeta_i^{(n)}\right|\geqslant\varepsilon_0$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_i^{(n)}=0(\forall i)$，取定$i_1$，必存在$n_1$，使

$$\sum_{i=1}^{i_1}\left|\zeta_i^{(n_1+p_{n_1})}-\zeta_i^{(n_1)}\right|<\frac{\varepsilon_0}{5}$$

因为$\left\{\zeta_i^{(n_1+p_{n_1})}-\zeta_i^{(n_1)}\right\}\in l$，必存在$i_2>i_1$，使

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty}\left|\zeta_i^{(n_1+p_{n_1})}-\zeta_i^{(n_1)}\right|<\frac{\varepsilon_0}{5}$$

故

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\left|\zeta_i^{(n_1+p_{n_1})}-\zeta_i^{(n_1)}\right|>\frac{3\varepsilon_0}{5}$$

类似于本章第35题，一般地可得$i_k > i_{k-1}$，$n_k > n_{k-1}$ （$k=2,3,4,\cdots$），使

$$\sum_{i=1}^{i_k} \left| \zeta_i^{(n_k+p_{n_k})} - \zeta_i^{(n_k)} \right| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty} \left| \zeta_i^{(n_k+p_{n_k})} - \zeta_i^{(n_k)} \right| < \frac{\varepsilon_0}{5}$$

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} \left| \zeta_i^{(n_k+p_{n_k})} - \zeta_i^{(n_k)} \right| > \frac{3\varepsilon_0}{5}$$

令

$$a_i = \begin{cases} 0 & 1 \leqslant i \leqslant i_1 \\ \operatorname{sgn}\left[\zeta_i^{(n_k+p_{n_k})} - \zeta_i^{(n_k)} \right], & i_k < i \leqslant i_{k+1} \end{cases}$$
$$(k=1,2,3,\cdots)$$

则$f=\{a_i\} \in l^{\infty}$，但

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[\zeta_i^{(n_k+p_{n_k})} - \zeta_i^{(n_k)} \right] > \frac{\varepsilon_0}{5} \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

这与$f(x_n)$是基本列矛盾，故x_n在l中强收敛于0，即$x_n \xrightarrow{w} 0$。

(iii) 对于$C[a,b]$，不妨设$[a,b]=[0,1]$，取

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t=1 \text{ 时} \\ 1 & t \neq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

则

$$x_n(t) = t^n \in C[0,1], \quad x_n(t) \xrightarrow{\text{处处}} x(t), \quad f \in C^*[0,1]$$

存在$g(t) \in V[0,1]$，使

$$f(x_n)=\int_0^1 x_n(t)\,dg(t)$$

据Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)dg(t)=\int_0^1 x(t)dg(t)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在有限（对一切 $f\in C^*[0,1]$），据参考文献[2] p136例5，若$x_n(t)\xrightarrow{w}\bar{x}(t)\in C[0,1]$，必有$\bar{x}(t)=x(t)$，但$x(t)\overline{\in} C[0,1]$，故$\{x_n\}$不可能弱收敛于$C[0,1]$中某一元素，因此$C[0,1]$不是序列弱完备的。

37. 赋范线性空间E称为一致凸的，是指对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$（$\|x\|=\|y\|=1$），就有$\|x+y\|\leqslant 2-\delta$。证明

(i) $C[a,b]$不是一致凸的；

(ii) $L[a,b]$、l都不是一致凸的；

(iii) 在一致凸空间中，若$\{x_n\}$弱收敛于x，且$\|x_n\|\longrightarrow\|x\|$，则$\{x_n\}$强收敛于$x$。

证 (i) 在$C[a,b]$中，取$x(t)=1$，$y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$，则

$$\|x\|=\|y\|=\frac{\|x+y\|}{2}=\|x-y\|=1$$

设 $0<\varepsilon<1$，则$\|x-y\|>\varepsilon$，但$\dfrac{\|x+y\|}{2}>1-\delta$（$\forall\delta>0$），故$C[a,b]$不是一致凸的。

(ii) 在$L[a,b]$中，取$x(t)=\dfrac{1}{b-a}$，$y(t)=\dfrac{2(t-a)}{(b-a)^2}$，

则

$$\|x\|=\|y\|=\frac{\|x+y\|}{2}=1$$

$$\|x-y\|=\frac{1}{2}$$

设$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，则

$$\|x-y\|>\varepsilon$$

但

$$\frac{\|x+y\|}{2}>1-\delta \quad (\forall\delta>0)$$

故$L[a,b]$不是一致凸的。

在 l 中，取$x=e_1$，$y=e_2$，$0<\varepsilon<2$，则

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|=2>\varepsilon$$

而

$$\frac{\|x+y\|}{2}=1>1-\delta \quad (\forall\delta>0)$$

故 l 也不是一致凸的。

(iii)**证法一**：设E为一致凸空间，$x_n,x\in E$，$x_n\xrightarrow{w}x$，且$\|x_n\|\longrightarrow\|x\|$，我们要证明$x_n\xrightarrow{强}x$。设不然，则存在$\varepsilon_0>0$及$\{n_k\}$，使

$$\|x_{n_k}-x\|\geqslant\varepsilon_0$$

不妨设$x\neq0$及$\|x_{n_k}\|=\|x\|=1$，据一致凸性，存在$\delta=\delta(\varepsilon_0)>0$，使

$$\frac{\|x_{n_k}+x\|}{2}\leqslant1-\delta$$

又据Hahn—Banach定理，存在$f\in E^*$，使

$$\|f\|=1,\ f(x)=\|x\|,\qquad \left|f\left(\frac{x_{n_k}+x}{2}\right)\right|\leqslant(1-\delta)$$

但

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{x_{n_k}+x}{2}\right)=f(x)=\|x\|=1$$

矛盾，故$x_n\xrightarrow{\text{强}}x$。

证法二： 不妨设$\|x\|=\|x_n\|=1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，首先容易证明，若$2-\|x+x_n\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$，则$\|x_n-x\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$，现在$x_n+x\xrightarrow{w}2x$，则

$$2=2\|x\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|x_n+x\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n+x\|$$

$$\leqslant\|x\|+\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=2$$

即$\|x_n+x\|\longrightarrow 2(n\to\infty)$，故 $x_n\xrightarrow{\text{强}}x$。

38. 设$\{x_n\}$是Banach空间E中的一个点列，如果对于每个$f\in E^*$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty$$

则必存在正数μ，使对一切$f\in E^*$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant\mu\|f\|$$

证法一 令$I=\{\alpha:\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)$，$m$为任一自然数，$\varepsilon_i=\pm1$，$i=1,2,\cdots,m\}$，$f\in E^*$，令

$$g_\alpha(f)=f\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right)$$

因为$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty$，所以$g_\alpha\in E^{**}$，且

$$\sup_{\alpha\in I}|g_\alpha(f)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty\quad(\forall f\in E^*)$$

则据共鸣定理，必存在正数μ，使

$$\sup_{\alpha}\|g_\alpha\|\leqslant\mu$$

不妨设f为实泛函，取$\varepsilon_i=\mathrm{sgn}f(x_i)$，$(f(x_i)\neq0)$，并规定，$f(x_i)=0$时，$\varepsilon_i=1$，则对任一自然数$m$，

$$g_\alpha(f)=\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)|\leqslant\mu\|f\|$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant\mu\|f\|$$

若f为复泛函，则

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)$$

其中φ为实泛函，且$\|\varphi\|=\|f\|$，从而可证

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant\mu\|f\|$$

证法二 作算子序列$T_n\in\mathscr{B}(E^*,\ l)$如下：

$$T_nf=\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),0,\cdots\}\quad(f\in E^*)$$

$$\sup_{n\geqslant1}\|T_nf\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty$$

则存在$\mu>0$，使

$$\sup_n \|T_n\| \leqslant \mu$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f(x_n)| = \lim_{N\to\infty} |T_N f|$$
$$\leqslant \mu \|f\| \qquad (\forall f \in E^*)$$

39. $\{x_n\}$同38，则对每个$f \in E^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$收敛的充要条件是存在正数$\mu$，使对一切自然数$m$，以及任意的$\varepsilon_n = \pm 1$，有

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n x_n \right\| \leqslant \mu$$

证 必要性：同上题，令$g_\alpha(f) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right)$，$(\varepsilon_i = \pm 1)$，则$g_\alpha \in E^{**}$，且

$$\|g_\alpha\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\|$$

另一方面，据Hahn—Banach延拓定理，存在$f \in E^*$，使

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\|, \quad \|f\| = 1$$

所以

$$\|g_\alpha\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\|$$

由38题知对任意的自然数m及$\varepsilon_n = \pm 1$，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\right\|\leqslant\mu$$

充分性： 设对任一自然数m及$\varepsilon_n=\pm1\ (n=1,2,\cdots,m)$有

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\right\|\leqslant\mu$$

$f\in E^*$，我们取$\varepsilon_n=\operatorname{sgn}f(x_n)$，并规定$f(x_n)=0$时，$\varepsilon_n=1$，这里也设$f$是实泛函，则

$$\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)|=f\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right)\leqslant\mu\|f\|\quad(\forall m)$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty$$

40，求证上题中的条件等价于下列条件：存在$\mu>0$，使对任意的一串自然数$n_1<n_2<\cdots<n_k$（这里k也是任意的），有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\right\|\leqslant\mu$$

证 设条件$\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{n_\delta}\right\|\leqslant\mu$成立（对一切$k$以及一切$n_1<n_2<\cdots<n_k$），则

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\right\|\leqslant\left\|\sum{}'x_n\right\|+\left\|\sum{}''x_n\right\|\leqslant2\mu$$

这里Σ'，Σ''分别表示对$\varepsilon_n>0$，$\varepsilon_n<0$求和。

反之，设条件$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\right\|\leqslant\mu$成立($m$为任一自然数，$\varepsilon_n=\pm1$)，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{n_k}(\varepsilon_n^{(1)}-\varepsilon_n^{(2)})x_n\right\|\leqslant\mu$$

其中$\varepsilon_n^{(1)}=1$，$\varepsilon_n^{(2)}=1(n\neq n_i)$，$\varepsilon_n^{(2)}=-1(n=n_i)$。

41. 设$\{f_n\}$是Banach空间E的共轭空间E^*中的点列，则$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$对每个$x\in E$收敛的充要条件是对每个$F\in E^{**}$，$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|$收敛。

证 设对每个$F\in E^{**}$，$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|<+\infty$。因为

$$E\subset E^{**},\quad x\longleftrightarrow x^{**}=Jx\in E^{**}$$

则对$\forall x\in E$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}|x^{**}(f_n)|<+\infty$$

反之，设对每个$x\in E$，$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|<+\infty$，令

$$\varphi_\alpha(x)=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i f_i(x)$$

其中m为任一自然数，$\varepsilon_i=\pm 1$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则$\varphi_\alpha\in E^*$，且

$$\sup_\alpha|\varphi_\alpha(x)|<+\infty \qquad (\forall x\in E)$$

由共鸣定理得

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n f_n\right\|=\|\varphi_\alpha\|\leqslant\mu$$

现任取$F\in E^{**}$，不妨设F为实泛函，令$\varepsilon_n=\operatorname{sgn}F(f_n)$ $(F(f_n)\neq 0)$ $(n=1,2,\cdots,m)$，并规定$F(f_n)=0$时，$\varepsilon_n=1$，则

$$\sum_{n=1}^{m}|F(f_n)|=\left|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n F(f_n)\right|=\left|F\left(\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n f_n\right)\right|$$
$$\leqslant\|F\|\mu$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|<+\infty$$

42. 在$L^p[0,1]$$(1<p<+\infty)$中作一个弱收敛，但不强收敛的点列。

解 不妨设$[a,b]=[0,\pi]$，在$L^p[0,\pi]$中令

$$f_n(x)=(\operatorname{sgn}\sin nx)|\sin nx|^{\frac{2}{p}}$$

则

$$\|f_n\|=\left\{\int_0^\pi\sin^2 nx\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

且容易证明对一切$t\in[0,\pi]$有

$$\int_0^t f_n(x)dx \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

利用参考文献[2]p137例 6 立即知 $f_n \xrightarrow{W} 0$，但 $f_n \overset{强}{\nrightarrow} 0$。

43. 设$f(t)$是$[a, b]$上的可测函数，如果对于任一$g(t)\in L^q[a,b]$($1\leqslant q\leqslant +\infty$)，有$f(t)g(t)\in L[a,b]$，则$f(t)\in L^p[a,b]$（当$1<q<+\infty$时，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$；当$q=1$时，$p=+\infty$；当$q=+\infty$时，$p=1$）。

证 设$1<q<+\infty$，令

$$f_n(t)=\begin{cases} f(t) & |f(t)|\leqslant n\text{时} \\ 0 & |f(t)|>n\text{时} \end{cases}$$

则

$$f_n(t)\in L^p[a,b] \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

作$L^q[a,b]$上的线性泛函如下：

$$F_n(g)=\int_a^b g(t)f_n(t)dt \quad (\forall g\in L^q[a,b])$$

易知$F_n\in(L^p[a,b])^*$，且$\|F_n\|=\|f_n\|_p$。因为$f(t)\in L[a,b]$，故$f_n\xrightarrow{a.e} f$。又因为

$$|f_n(t)g(t)|\leqslant|f(t)g(t)|\in L[a,b]$$

由Lebesgue控制收敛定理立即知，对每个$g\in L^p[a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty}|F_n(g)|=\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|<+\infty$$

故据共鸣定理可得

$$\|f_n\|_p \leqslant M \qquad (M>0\text{为常数})$$

再由法杜定理可得

$$\left\{\int_a^b |f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M$$

即

$$f(t) \in L^p[a,b]$$

当$q=1$时，$p=+\infty$，则由$\|F_n\|=\|f_n\|_\infty \leqslant M$，立即可得$\|f\|_\infty \leqslant M$，故亦有$f(t)\in L^p[a,b]$。

当$q=+\infty$时，只需取$g(t)=1\in L^\infty[a,b]$，就有$f(t)\in L[a,b]$。

44. 设$\{\eta_n\}$为一数列，若对一切$x=\{\xi_n\}\in l^q(1\leqslant q\leqslant\infty)$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$收敛，则$\{\eta_n\}\in l^p$（这里的$p$与上题同）。

证 当$q=+\infty$时，显然有$\{\eta_n\}\in l$。

当$1\leqslant q<+\infty$时，令

$$F_n \longleftrightarrow \{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,\cdots\}\in l^p$$

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\eta_k$$

由条件知对一切$x=\{\zeta_k\}\in l^q$，有

$$\lim_{n\to\infty}|F_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\eta_k\right|<+\infty$$

故当$q>1$时，有

$$\|F_n\|=\left\{\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant M \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

当$q=1$时，有

$$\|F_n\|=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_k|\leqslant M \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

从而$\{\eta_n\}\in l^p$.

45. 设数列$\{\alpha_n\}\to 0(n\to\infty)$，在$l$定义算子$T$：$y=Tx$，其中$x=\{\xi_n\}$，$y=\{\alpha_n\xi_n\}$，证明$T$是全连续算子。

证 令$T_nx=\{\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,\cdots,\alpha_n\xi_n,0,\cdots\}$，则$T_n$是$l$中的有穷秩算子，任给$\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|\alpha_n|<\varepsilon$，则$n>N$时，有

$$\|(T_n-T)x\|<\varepsilon\|x\|$$

故$\|T_n-T\|\longrightarrow 0(n\to\infty)$，$T$为全连续算子。

46. 设M为赋范线性空间E的闭子空间，设x_0是M中某个弱收敛点列的极限，则$x_0\in M$。

证 设$x_0\overline{\in}M$，则$d=\rho(x_0,M)>0$，由Hahn-Banach定理，必存在$f\in E^*$，使

$$f(x_0)=d,\ f(x)=0 \quad (\forall x\in M)$$

但由条件存在$x_n\in M$，$x_n\xrightarrow{W}x$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)=0$$

矛盾，故$x_0\in M$。

47. 设E、E_1均为赋范线性空间，S、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，且S、T全连续，证明$\alpha S+\beta T$也是全连续的，这里α，β是数。

本题直接据全连续算子定义即可得。

48. 设E是Banach空间，E_1，E_2是E的闭子空间，且$E=E_1\dot{+}E_2$（$E_1\dot{+}E_2$表示直接和，定义见[2]p58），证明存在$M>0$，使得对一切$x\in E$，有

$$\|x_1\|\leqslant M\|x\|,\quad \|x_2\|\leqslant M\|x\|$$

其中$x_i\in E_i(i=1,2)$满足$x=x_1+x_2$。

证法一 在$E=E_1+E_2$中定义新范数

$$|||x|||=\|x_1\|+\|x_2\| \qquad (x=x_1+x_2\in E)$$

容易证明$(E,\ |||\cdot|||)$完备，且

$$\|x\|=\|x_1+x_2\|\leqslant|||x|||$$

则据Banach逆算子定理的推论，存在$K>0$，使对一切$x\in E$，有

$$K|||x|||\leqslant\|x\|$$

于是

$$\|x_i\|\leqslant\frac{1}{K}\|x\| \qquad (i=1,2)$$

证法二 定义映射T_i：$E=E_1\dot{+}E_2\longrightarrow E_i$上$(i=1,2)$如下：

$$T_i(x_1+x_2)=x_i \qquad (i=1,2)$$

则可以证明T_i是E到E_i的闭线性算子。由闭图象定理，T_i有界$(i=1,2)$，令$M=\max(\|T_1\|,\ \|T_2\|)$，则

$$\|x_i\|\leqslant M\|x\| \qquad (i=1,2)$$

49. 设E为Banach空间，F是E的闭子空间，则自然同态映射$E\longrightarrow E/F$将E的开单位球映为E/F的开单位球。

证 记$E\longrightarrow E/F$的自然同态映射为T，E的开单位球为S，$S=\{x\in E:\ \|x\|<1\}$，则$x_0\in S$时，

$$\|\tilde{x}_0\|=\|Tx_0\|=\inf_{x\in\tilde{x}}\|x\|\leqslant\|x_0\|<1$$

故T将E的开单位球映为E/F的开单位球。

50. 设E为赋范线性空间，F为E的闭子空间，则E完

备的充分必要条件是F与E/F完备。

证 必要性：设E完备，F完备显然，我们证明E/F也完备。任取E/F中的基本列$\{\tilde{x}_n\}$，则存在子序列$\{\tilde{x}_{n_k}\}$，使

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\tilde{x}_{n_{k+1}}-\tilde{x}_{n_k}\|<\infty$$

取定$x_1\in\tilde{x}_{n_1}$，必存在$x_2\in\tilde{x}_{n_2}$，使

$$\|x_2-x_1\|\leqslant\|\tilde{x}_{n_2}-\tilde{x}_{n_1}\|+\frac{1}{2}$$

又因为对取定的x_2，当x_3取遍$\tilde{x}_{n_3}$时，x_3-x_2必取遍$\tilde{x}_{n_3}-\tilde{x}_{n_2}$，故存在$x_3\in\tilde{x}_{n_3}$，使

$$\|x_3-x_2\|\leqslant\|\tilde{x}_{n_3}-\tilde{x}_{n_2}\|+\frac{1}{2^2}$$

如此继续下去，可得序列$\{x_k\}\subset E$，满足

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\|\tilde{x}_{n_{k+1}}-\tilde{x}_{n_k}\|+\frac{1}{2^k}\quad k=1,2,3,\cdots$$

故$\{x_k\}$是E中基本列。E完备，则$x_n\longrightarrow x\in E$，令$\tilde{x}$为$x$所确定的类，则

$$\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|\leqslant\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n_k}\|+\|\tilde{x}_{n_k}-\tilde{x}\|$$

$$\leqslant\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n_k}\|+\|x_k-x\|$$

故$\tilde{x}_n\longrightarrow\tilde{x}\in E/F$，$E/F$完备。

充分性：设F，E/F均完备，则对任一$x\in E$，$x+F$也是完备的。现任取E中基本列$\{x_n\}$，易知$\{\tilde{x}_n\}$是E/F中

的基本列，由于E/F完备，必存在$\tilde{x}\in E/F$，使$\tilde{x}_n\longrightarrow\tilde{x}$（$n\to\infty$）。因为

$$\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|=\inf_{y\in\tilde{x}}\|x_n-y\|\longrightarrow 0\ (n\to\infty);$$

则对每一个自然数k，存在$x_{n_k}\in\tilde{x}_{n_k}$，$y_k\in\tilde{x}$，使

$$\|x_{n_k}-y_k\|<\frac{1}{k}$$

于是

$$\|y_{k+p}-y_k\|\leqslant\|y_{k+p}-x_{n_{k+p}}\|+\|x_{n_{k+p}}-x_{n_k}\|+\|x_{n_k}-y_k\|$$

故$\{y_k\}$是$x+F$中的基本列，$x+F$完备，必存在$y\in x+F$，使$y_k\longrightarrow y(k\to\infty)$。又

$$\|x_{n_k}-y\|\leqslant\|x_{n_k}-y_k\|+\|y_k-y\|$$

故$x_{n_k}\longrightarrow y\in E$。但$\{x_n\}$为$E$中基本列，故必有$x_n\to y(n\to\infty)$，$E$完备性得证。

51. 设E为复Banach空间，T_1，$T_2\in\mathscr{B}(E)$，如果T_1，T_2可换，则

$$r(T_1+T_2)\leqslant r(T_1)+r(T_2)$$

其中$r(T)$为T的谱半径。

证 因为$r(T_i)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T_i^n\|^{\frac{1}{n}}(i=1,2)$，则对任给的$\varepsilon>0$，$\dfrac{\|T_i^n\|}{(r(T_i)+\varepsilon)^n}$是有界数列$(i=1,2)$，故存在常数$M_\varepsilon>0$，使得对一切自然数$n$，有

$$\|T_i^n\|\leqslant M_\varepsilon(r(T_i)+\varepsilon)^n\qquad(i=1,2)$$

$$\|(T_1+T_2)^n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_1^k T_2^{n-k} \right\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|T_1^k\| \cdot \|T_2^{n-k}\|$$

$$\leqslant M_\varepsilon^2[r(T_1)+r(T_2)+2\varepsilon]^n$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_1+T_2)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(T_1)+r(T_2)+2\varepsilon$$

又因为$\varepsilon>0$是任取的，故

$$r(T_1+T_2) \leqslant r(T_1)+r(T_2)$$

52. 试证由l^2到l^1的有界线性算子是全连续算子。

证 因为l^2可分，自共轭，据[2]定理 4.9，$S=\{x\in l^2,\ \|x\|\leqslant 1\}$必 * 弱列紧，即存在$\{x_n\}\subset S$，使

$$x_n \xrightarrow{*w} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$$

T是有界线性算子，则

$$Tx_n \xrightarrow{w} Tx$$

由于l^1中弱收敛等价于强收敛，故$Tx_n \xrightarrow{S} Tx$，从而T必是全连续线性算子。

53. 设E，E_1均为赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,\ E_1)$，若T^*是全连续的，则T也是全连续的。

证 因为$T^{**}\in\mathscr{B}(E^{**},\ E_1^{**})$是全连续算子，而$x\in E$时，有

$$Tx=T^{**}x$$

故T也是全连续算子。

54. 乘法算子$Tx(t)=a(t)x(t)$在空间$C[a,b]$上能是全连续算子吗？这里$a(t)$是给定的于$[a,b]$上连续的函数。

解 因为$a(t)\in C[a,b]$，我们令

$$m=\min_{t\in[a,b]} a(t),\quad M=\max_{t\in[a,b]} a(t)$$

则$a(t)$的值域为区间$[m, M]$，容易证明$\sigma(T)=[m, M]$，故T不可能是全连续算子。

55. 乘法算子$Tx(t)=a(t)x(t)$在空间$L^2[a,b]$上能是全连续算子吗？这里$a(t)$是给定的$[a,b]$上的有界可测函数。

解 不妨设$a(t)$不对等于零，若T为全连续算子，则必存在$\lambda_0\neq 0$，使得集合$E(t\in[a,b]: a(t)=\lambda_0)$的测度大于零，因为否则对一切$\lambda\neq 0$，$mE(t\in[a,b]: a(t)=\lambda)=0$，就可推出$\lambda$不是$T$的特征值，从而必属于正则集，故$\sigma(T)=\{0\}$，$T=0$，矛盾。当$mE(t\in[a,b]: a(t)=\lambda_0)>0$时，$\lambda_0$必是$T$的特征值，且$T$对应于$\lambda_0$的特征向量空间是无穷维的，这与$T$为全连续矛盾，故$T$不是全连续算子。

56. 试证按公式$Jx=x$作用的嵌入算子$J: C^1[0,1]\longrightarrow C[0,1]$是全连续算子，这里$C^1[0,1]$中的范数规定为

$$\|x\|=\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$$

证 设A为$C^1[0,1]$中任一有界集，则存在常数$K>0$，使得$x\in A$时，有

$$\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\leqslant K,\quad \max_{t\in[0,1]}|x'(t)|\leqslant K$$

则JA是$C[0,1]$中有界集，且等度连续，故JA是$C[0,1]$中的列紧集，于是J是全连续算子。

57. 设T为赋范线性空间E中的有界线性算子，试证明

$$\|T\|=\sup_{\|x\|<1}\|Tx\|$$

58. 设E，E_1为Banach空间，A：$D(T)\subset E\longrightarrow E_1$是闭线性算子，若在$\mathscr{D}(A)$中定义新范数

$$\|x\|_G=\|x\|+\|Ax\|,\quad x\in\mathscr{D}(A)$$

则$(\mathscr{D}(A),\ \|\cdot\|_G)$是一个Banach空间。

59. 设E为无穷维赋范线性空间，f是E上的不连续线性泛函，$B=\{x\in E;\ |f(x)|\leqslant 1\}$，证明$B$无内点。

60. 在数列空间C中，令

$$\|x\|=\sup\{|x_{n-1}-x_n|;\ n=1,2,\cdots\}$$

其中$x=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}\in C$，并规定$x_0=0$，证明$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$为$C$上的不连续线性泛函。

61. 设X为Banach空间，$L\subset X$是闭子空间，$x_0\in X$，$\rho(x_0,\ L)=d>0$，证明$L_0=\{\alpha x_0+y:\ y\in L,\ \alpha\in$数域$K\}$是$X$的闭子空间。

提示： 设$z_n=\alpha_n x_0+y_n\in L_0$，$z_n\longrightarrow z_0\ (n\to\infty)$，因为$x_0\overline{\in}L$，应用Hahn—Banach定理推论，证明$\{\alpha_n\}$收敛，从而$\{y_n\}$也收敛。

62. 设X为赋范线性空间，f，$g\in X^*$，则$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(g)$的充要条件是存在$\lambda\neq 0$，使得$f=\lambda g$，这里$\mathrm{Ker}(f)$表示$f$的零空间。

提示 只须证明必要性，并且可不妨设$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(g)\neq X$.取$x_0\in X-\mathrm{Ker}(f)$，令$\lambda_0=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$，证明$f(x)=\lambda_0 g(x)$。

［注］ 我们还可以证明，若对某个常数 $C\neq 0$，超平面 $f(x)=C$ 与超平面 $g(x)=C$ 一致，则必有 $f(x)\equiv g(x)$。

63. 设 X 为赋范线性空间，S 为 X 的极大真闭子空间，证明存在 X 上的线性泛函 f（不一定有界），使得 $\mathrm{Ker}(f)=S$。

提示 任取 $x_0\in X-S$，证明 X 等于由 $S\cup\{x_0\}$ 张成的闭子空间，则对任一 $x\in X$，存在 $s\in S$ 以及 $\lambda_0\in$ 数域 K，使得 $x=s+\lambda_0 x_0$，定义

$$f(x)=\lambda_0 \qquad (x\in X)$$

64. 设 X 为Banach空间，$B=\{x_k\}\subset X$，若由 B 张成的子空间在 X 中稠密，则

(1) $\displaystyle d(f_1,f_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f_1(x_k)-f_2(x_k)|}{2^k(\|x_k\|+1)}$ 是 X^* 上的一个距离；

(2) 由 X^* 的 * 弱收敛可推出按距离 d 收敛；

(3) 令 $S=\{f\in X^*:\ \|f\|\leqslant 1\}$，则 S 是距离空间 (X^*,d) 中的紧集。

提示 (3)利用结论(2)只须证明对每一个序列 $\{f_n\}\subset S$，存在子序列 $f_{n_k}\xrightarrow{*w} f\in S$。

65. 设 E，E_1 均为赋范线性空间，则 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 完备的充分必要条件是 E_1 完备。

提示 必要性，设 $\{y_n\}$ 是 E_1 中的任一基本点列，取 $x_0\in E$，$\|x_0\|=1$，$f\in E^*$，使 $f(x_0)=\|x_0\|$，定义算子序列 $T_n\in\mathscr{B}(E,E_1)$ 如下：

$$T_n x=f(x)y_n \qquad (x\in E)$$

证明$\{T_n\}$是$\mathscr{B}(E,E_1)$中的基本列。

66. 设 $C_0=\left\{\{x_n\}:\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\right\}$，规定 $\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$，映射T：$C_0\longrightarrow C_0$：

$$Tx=\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$$

则$\|T\|=1$，$R(T)\neq C_0$，$\overline{R(T)}=C_0$，并求出T^*。

答 T^*：$l\longrightarrow l$，

$T^*(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots)$。

67. 设E,E_1均是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，证明T^*是一对一的充分必要条件是$\overline{R(T)}=E_1$。

68. 设E，E_1均是Banach空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，T^{-1}存在有界，证明T^*是一对一的充分必要条件是$R(T)=E_1$。

69. 设T：$C\longrightarrow C$，$x=\{x_n\}\in C$时，$Tx=\{\frac{x_n}{n}\}$，试求出T^*的零空间。

答 T^*的零空间为$e_1=(1,0,0,\cdots)$张成的一维子空间。

70. 设E为自反Banach空间，则对任一$f\in E^*$，泛函数$|f(x)|$在E的单位球面上可取到最大值。

71. 设X为Banach空间，集合$E\subset X^*$，E张成的子空间在X^*中稠密，又设$\{x_n\}\subset X$，$\sup\limits_n\|x_n\|\ \infty$，且对一切$f\in E$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$，证明$x_n$弱收敛于$x$。

72. 设X为Banach空间，A_n，$T\in\mathscr{B}(X)$，T为紧算子，且A_n强收敛于零，证明A_nT一致收敛于零。

73. 设φ是有限测度空间(X,μ)上的$a.e$有限可测函数，$\mathscr{D}=\{f\in L^2(X;\mu):\ \varphi\cdot f\in L^2(X;\mu)\}$，则$T:\ \mathscr{D}\to L^2(X;\mu)$，$Tf=\varphi\cdot f(f\in\mathscr{D})$是稠定闭线性算子。

74. 设$g(t)\in C[0,1]$，在$C[0,1]$上定义$f(x)=\int_0^1 x(t)\cdot g(t)dt(x(t)\in C[0,1])$，证明$f\in C^*[0,1]$且

$$\|f\|=\int_0^1|g(t)|dt$$

75. 设E是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset E$，K为数域，$\{a_n\}\subset K$，则存在$f\in E^*$使得成立

(i) $f(x_i)=a_i\qquad(i=1,2,3,\cdots)$;

(ii) $\|f\|\leqslant M$

其充分必要条件是对K中任意的$t_1,t_2,\cdots,t_n$成立

$$\left|\sum_{i=1}^n t_ia_i\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^n t_ix_i\right\|$$

这里n为任一自然数。

提示 令

$$B=\left\{\sum_{i=1}^n t_i\cdot x_i:\ t_i\in K,i=1,2,\cdots,n;n\text{为任一自然数}\right\}$$

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^n t_ia_i\qquad(x\in B)$$

应用Hahn—Banach延拓定理立即得本题充分性。

76. 设E为Banach空间，E_1,E_2为E的闭子空间，$E=E_1\dotplus E_2$，如果$x\in E$时，$x=x_1+x_2$，其中$x_1\in E_1$,

$x_2\in E_2$，我们令$Px=x_1$。

(i) 试证明P是$E\longrightarrow E_1$上的有界线性算子，且满足$P^2=P$；

(ii) 求算子P的点谱，连续谱和剩余谱；

(iii) 证明$\lambda\neq 0$，1时，$R(\lambda;P)=\frac{1}{\lambda}I-\frac{1}{\lambda(\lambda-1)}P$.

77. 设X是Banach空间，G是X的闭子空间，T是由G到有界数列空间m的有界线性算子，则T一定可以延拓为X到m的有界线性算子$\widetilde{T}$，且满足$\|\widetilde{T}\|=\|T\|$。

提示 设$Tx=(\zeta_i)$，$x\in G$，作G上的有界线性泛函$f_i(x)=\zeta_i(i=1,2,\cdots)$，应用Hahn—Banach定理立即可得。

78. 设X是Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，$R(T)=l^1$，则X有子空间M，使它满足下面的性质：

(i) 有M到l^1上的双向连续的线性算子；

(ii) 有X到M的有界投影算子$P(P^2=P)$。

79. 设X为Banach空间，$p(x)$是定义在X上的泛函，满足条件：

(i) $p(x)\geqslant 0$；$\alpha>0$时，$p(\alpha x)=\alpha p(x)$；

(ii) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$；

(iii) 若$x\in X$，$x_n\in X$，$x_n\to x$，则$\varliminf\limits_{n\to\infty}p(x_n)\geqslant p(x)$。

证明必存在$M>0$，使得对一切$x\in X$成立

$$p(x)\leqslant M\cdot\|x\|$$

提示 令$M_k=\{x\in X:\ p(x)\leqslant k\}$，证明$M_k$是闭集，并应用Baire纲定理。

80. 设f是赋范线性空间E上的线性泛函，则f连续的充分必要条件是$\mathrm{Ker}(f)$为E的闭子空间。

提示 充分性，不妨设$f\neq 0$，任给$\varepsilon>0$，取$x_0\in E$，使$f(x_0)=\varepsilon$，考察集合

$$\mathrm{Ker}(f)+x_0=\{x_0+x:\ x\in \mathrm{Ker}(f)\}$$

利用$0\overline{\in}\mathrm{Ker}(f)+x_0$，证明$f(x)$在0点连续。

81. 试求下列作用于（实）l^1的算子T的共轭算子：

(i) $T(x_1,x_2,\cdots)=(\underbrace{0,\ 0,\ \cdots}_{n},x_1,0,\cdots)$；

(ii) $T(x_1,x_2,\cdots)=(\alpha_n x_n,\alpha_{n+1}x_{n+1},\cdots)$，$|\alpha_n|\leqslant 1$，$n=1,2,\cdots$。

答 (i) T^*：$l^\infty\longrightarrow l^\infty$，

$$T^*(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)=(\overbrace{0,\ \cdots 0,\ y_n}^{n},\ 0,\ \cdots)。$$

(ii) T^*：$l^\infty\longrightarrow l^\infty$，

$$T^*(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)=(\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{n},\ \alpha_n y_1,\ \alpha_{n+1}y_2,\cdots)。$$

82. 设E为Banach空间，G，H为的闭子空间，$G\cap H=\{0\}$，则$G+H=\{x+y:\ x\in G,\ y\in H\}$是闭子空间的充分必要条件是存在$\alpha>0$，使得对一切$x\in G$，$y\in H$，有

$$\|x\|\leqslant\alpha\|x+y\|$$

提示 必要性，作映射T：$G+H\longrightarrow G$上如下：

$$T(x+y)=x$$

应用闭图象定理。

83. 设E，E_α（$\alpha\in\mathscr{A}$）是一族Banach空间，记$Y=\{(y_\alpha):\ y_\alpha\in E_\alpha,\ \sup\limits_{\alpha}\|y_\alpha\|<\infty\}$，在$Y$中规定线性运算同

R^n，范数$\|(y_\alpha)\| = \sup\limits_\alpha \|y_\alpha\|$，试证明

(i) Y是一个Banach空间；

(ii) 设$T_\alpha \in \mathscr{B}(E, E_\alpha)$，$(\alpha \in \mathscr{A})$，若对一切$x \in E$，$\sup\limits_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$，令$Tx = (T_\alpha x)$，则$T$是$E \longrightarrow Y$中的有界线性算子。

提示 (ii) 作算子$\widetilde{T}_\alpha \in \mathscr{B}(E, Y)$，$\alpha \in \mathscr{A}$，

$$\widetilde{T}_\alpha x = (y_\beta)$$

这里$\beta \in \mathscr{A}$，当$\beta = \alpha$时，$y_\beta = T_\alpha x$，当$\beta \neq \alpha$时，$y_\beta = 0$，应用共鸣定理。

本题也可以先证明T是闭线性算子，再应用闭图象定理来证明。

84. 设$X = \{(\zeta_n)$：ζ_n均为实数，且只有有限个$\zeta_n \neq 0\}$，$x \in X$，$\|x\| = \sup\limits_n |\zeta_n|$，令$T$：$X \longrightarrow X$，$y = Tx = (\frac{\zeta_n}{n})$，证明$T$是$X \longrightarrow X$上的一对一线性算子，但$T^{-1}$无界。

85. 设X为多项式全体，$x(t) \in X$，$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$时，规定$\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_j|$，证明$X$不是完备的赋范线性空间。

86. 设X和Y是Banach空间，T是$X \longrightarrow Y$中的一对一有界线性算子，证明T^{-1}：$R(T) \longrightarrow X$上是有界的充分必要条件是$R(T)$为Y中的闭集。

87. 设E是赋范线性空间（不一定完备），$f_n \in E^*$，$\|f_n\| \leqslant M$（$n = 1, 2, 3, \cdots$），则$A = \{x \in E$：$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$存在$\}$是$E$的闭子空间。

88. 设X为Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，若$R(T)$为闭子空间，证明对一切$y\in R(T)$，存在一个x，使$y=Tx$以及$\|x\|\leqslant M\|y\|$，其中M是与$y\in R(T)$无关的常数。

提示 视T为$X\longrightarrow R(T)$上的有界线性算子，应用开映射定理。也可以利用商空间和Banach逆算子定理来证明。

89. 设T_0: $C_0\longrightarrow l^2$，$x=\{\zeta_k\}\in C_0$，$Tx=\{\frac{\zeta_k}{k}\}$，定义T为T_0从$C_0\longrightarrow E_1=R(T_0)$上的算子，证明存在紧算子序列$T_n\in\mathscr{B}(C_0,E_1)$，使得$T_n$一致收敛于$T$，但$T$非紧。

90. 设E为Banach空间，具有有界逼近性质，即存在有穷秩算子序列$\{S_n\}\subset\mathscr{B}(E)$，使$S_n$强收敛于$I$，试证明

(i) 对任一紧算子$T\in\mathscr{B}(E)$，必存在有穷秩算子序列$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E)$，使得$T_n$一致收敛于$T$；

(ii) 如果E具有可数基，则对任一紧算子$T\in\mathscr{B}(E)$，必存在有穷秩算子序列$\{T_n\}$，使得T_n一致收敛于T。

提示 (ii) 在E中引进新范数

$$\|x\| = \sup_m\left\|\sum_{i=1}^{m}\zeta_i e_i\right\|$$

其中$\{e_i\}$为E的可数基，$x\in E$，$x=\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i e_i$。证明$E_1=(E,\ \|\cdot\|)$是Banach空间，利用Banach逆算子定理证明$T_n x=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i e_i$是一个有界线性算子。

91. 设X为可分的Banach空间，则X的共轭空间X^*为

* 弱可分的。

提示 应用本章第64题可证明X^*中任一有界集的 * 弱拓扑等价于(X^*,d)，由$X^*=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$，其中 $S_n=\{f\in X^*: \|f\|\leqslant n\}$，立即可得$X^*$是 * 弱可分的。

92. 设A是Banach空间X中的一个线性算子，$\rho(A)\supset(0,+\infty)$，若存在常数$M>0$，使对一切自然数$n$以及$\lambda>0$有

$$\|\lambda^n R(\lambda;A)^n\|\leqslant M$$

则存在X上的一个范数$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，使得对一切$x\in X$，有

$$\|x\|\leqslant |\!|\!|x|\!|\!| \leqslant M\|x\|$$

以及

$$|\!|\!|\lambda R(\lambda;A)x|\!|\!|\leqslant |\!|\!|x|\!|\!| \qquad (\lambda>0)$$

提示 先令

$$\|x\|_\mu=\sup_{n\geqslant 0}\|\mu^n R(\mu;A)^n x\| \qquad (\mu>0)$$

证明$\|x\|_\mu$关于$\mu>0$单调上升有界，然后再令

$$|\!|\!|x|\!|\!| = \lim_{\mu\to+\infty}\|x\|_\mu$$

第六章　希尔伯特空间及其算子

一、基本概念和主要定理

内积和希尔伯特空间　设X是复数域C上的线性空间，若映射(x,y)：$X\times X\longrightarrow C$满足

（i）$(x, x)\geqslant 0$，当且仅当$x=0$时$(x,x)=0$；

（ii）$(x,y)=\overline{(y, x)}$；

（iii）$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

（iv）$(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\lambda\in C$

则称(x, y)为元素x和y的内积，X称作复内积空间，简称为内积空间。对内积空间X，若规定x的范数为$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$，则X为赋范线性空间，如果X按范数$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$是完备的，则称它为完备内积空间。一个可分的无穷维完备内积空间称作希尔伯特（Hilbert）空间，Hilbert空间常用字母H来表示。请读者注意，有些书上称完备内积空间为Hilbert空间。

标准直交系　设X为内积空间，$\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$，如果

$$(e_\alpha, e_{\alpha'})=\begin{cases}0, & \alpha\neq\alpha'\\ 1, & \alpha=\alpha'\end{cases}$$

则称$\{e_\alpha\}$为X中的标准直交系。可以证明$C_\alpha=(x, e_\alpha)$中至多可列个不等于零。

设$\{e_n\}\subset X$为X的可列标准直交系，$x\in X$，称$C_n=$

(x, e_n) $(n=1,2,\cdots)$ 为X关于e_n的Fourier系数。

完备标准直交系和完全标准直交系 设$\{e_n\}$是内积空间X中的标准直交系，若对一切$x\in X$，Paserval等式

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$$

成立，则称$\{e_n\}$为完备系；若对一切n，$(x, e_n)=0$就可推出$x=0$，则称$\{e_n\}$是完全系。对于Hilbert空间H，$\{e_n\}$完备等价于$\{e_n\}$完全，对一般内积空间X，$\{e_n\}$完备必完全，但反过来不一定成立。H的可分性是H中存在至多可列个完备标准直交系的充分必要条件。

正交性与射影定理 设H为Hilbert空间，$x,y\in H$，若$(x,y)=0$，则称x与y正交；设$L\subset H$为子空间，若对任意的$y\in L$，$(x,y)=0$,则称x与子空间L正交，记作$x\perp L$；H中与L正交的元素全体叫做L的直交补，记为$L^{\perp}$.

定理1（直交分解） 设M为Hilbert空间H的闭子空间，则对任一$x\in H$，存在唯一元素$y\in M$和$z\in M^{\perp}$，使得

$$x=y+z$$

元素y称作x在子空间M上的射影，此时，我们记

$$H=M\oplus M^{\perp}$$

称H为子空间M和$M^{\perp}$的直交和。

定理2 设$\{e_n\}$为Hilbert空间H中的标准直交系，则下列条件等价：

（i）$\{e_n\}$是H中的完备系；

（ii）对任一$x\in H$，$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$（Fourier展式）；

(iii) 对所有$x,y\in H$，$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)(e_n,y)$.

定理3（Riesz表现定理） 设X为完备内积空间，则对任一$f\in X^*$，存在唯一元素$u\in X$，使对一切$x\in X$，有

$$f(x)=(x,u)$$

以及

$$\|f\|=\|u\|$$

（Hilbert）共轭算子T^* 设X为完备内积空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，取定$y\in X$，则(Tx,y)是$x\in X$的有界线性泛函，故存在唯一元素$u\in X$，使

$$(Tx,y)=(x,u)$$

记

$$T^*y=u$$

并称T^*为T的（Hilbert）共轭算子。显然$T^*\in\mathscr{B}(X)$，$\|T^*\|=\|T\|$.

自伴算子、正算子和直交投影算子 设X为完备内积空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，若$T=T^*$，则称T为自伴算子。易知$T=T^*$等价于$(Tx,y)=(x,Ty)$对一切x，$y\in X$成立。对自伴算子T，有$\|T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$.

设X为复的完备内积空间，若对一切$x\in X$，有

$$(Tx,x)\geqslant 0$$

则称T为正算子，记作$T\geqslant 0$；设T_1，$T_2\in\mathscr{B}(X)$，自伴，若$T_1-T_2\geqslant 0$，则称$T_1\geqslant T_2$；设$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(X)$为自伴算子序列，若$T_n\leqslant T_{n+1}$（$T_n\geqslant T_{n+1}$），$n=1,2,\cdots$，则称$\{T_n\}$单调上升（单调下降）。

设X为完备内积空间，L为X的闭子空间，根据直交分

解定理，对任一$x\in X$，存在唯一分解

$$x=x_1+x_2$$

其中$x_1\in L$，$x_2\in L^{\perp}$，我们令

$$Px=x_1$$

则P为定义在X上的有界线性算子，称P为L上的正交投影算子，简称为投影算子。易知P为投影算子的充要条件是P自伴且$P^2=P$。

正常算子、酉算子和等距算子 设$T\in\mathscr{B}(H)$，若$T^*T=TT^*$，则称T为正常算子或称T为正规算子；若$T^*T=TT^*=I$，则称T为酉算子；若对任一$x\in H$有$\|Tx\|=\|x\|$，则称T为等距算子。一个酉算子必是正常算子和等距算子。

近似点谱 设$T\in\mathscr{B}(H)$，我们称集合

$$\sigma_a(T)=\{\lambda\in C:\ 存在x_n\in H,\ \|x_n\|=1,\ 使得\|(\lambda I-T)x_n\|\longrightarrow 0\}$$

为T的近似点谱。易知

$$\sigma_a(T)\subset\sigma(T),\quad \sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\subset\sigma_a(T)$$

收敛性 设$\{x_n\}\subset H$，若$\|x_n-x\|\longrightarrow 0$，则称$\{x_n\}$强收敛于$x$；若对任一$y\in H$，$(x_n,y)\longrightarrow(x,y)$，则称$\{x_n\}$弱收敛于$x$。在$\mathscr{B}(H)$中可以定义三种收敛性：设$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(H)$，$T\in\mathscr{B}(H)$

(i) 若$\|T_n-T\|\to 0$，则称$\{T_n\}$一致收敛于T，记作$T_n\Rightarrow T$；

(ii) 若对每个$x\in H$，$\|T_nx-Tx\|\longrightarrow 0$，则称$\{T_n\}$强收敛于$T$，记作$T_n\xrightarrow{s}T$；

(iii) 若对任意的x，$y\in H$，$(T_nx,y)\longrightarrow(Tx,y)$，

则称$\{T_n\}$弱收敛于T，记作$T_n \xrightarrow{w} T$.

定理 4 设$\{T_n\}$为完备内积空间X中的单调自伴算子序列，且$\|T_n\| \leqslant K$对一切n成立，则存在唯一的自伴算子T，使$\{T_n\}$强收敛于T.

定理 5 设$T \in \mathscr{B}(X)$，$T \geqslant 0$，则存在唯一的正算子S使$S^2 = T$，并称S为T的正平方根，记为$S = T^{\frac{1}{2}}$.

谱族(单位分解)和有界自伴算子的谱分解定理 设$\{E_\lambda\}$是Hilbert空间H上的一族投影算子，λ为实参数，若E_λ满足

(i) 单调性：$\lambda < \mu$时，$E_\lambda \leqslant E_\mu$;

(ii) 右连续性：对任一$x \in H$，有$\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0 + 0} E_\lambda x = E_{\lambda_0} x$;

(iii) 存在有限实数a和$b(a < b)$，使得$\lambda < a$时，$E_\lambda = 0$，$\lambda \geqslant b$时，$E_\lambda = I$

则称$\{E_\lambda\}$为$[a, b]$上的谱族或单位分解。

定理 6 设$T \in \mathscr{B}(H)$，自伴，则由算子T可产生一个$[m, M]$上的谱族$\{E_\lambda\}$($m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Tx, x)$，$M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Tx, x)$)，使

$$T = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda$$

积分在算子范数意义下收敛，且E_λ和任一与T可换的有界线性算子可换。

定理 7 设$T \in \mathscr{B}(H)$，自伴，则

(i) $\rho(T) = \{\lambda \in C: \lambda$是非实数$\} \cup \{\lambda \in R: \lambda \overline{\in} [m, M]\} \cup \{\lambda \in [m, M]$：存在某个区间$[\alpha, \beta]$，使$\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$，且

E_λ在$[\alpha, \beta]$上取常值}；

（ii）$\lambda_0 \in \sigma_p(T)$的充要条件是$E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 - 0}$，且对应于$\lambda_0$的特征向量空间$L_{\lambda_0}$等于$E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0}$的值域；

（iii）$\sigma_\gamma(T) = \phi$；

（iv）$\lambda_0 \in \sigma_c(T)$的充要条件是$E_{\lambda_0} = E_{\lambda_0 - 0}$，且对任何满足$\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$的实数$\lambda_1$和$\lambda_2$有$E_{\lambda_1} \neq E_{\lambda_2}$。

定理 8 设$T \in \mathscr{B}(H)$是全连续自伴算子，则在算子范数意义下，T可表成下列级数：

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n$$

其中λ_n是T的非零特征值，$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \cdots$，$E_n$是$T$对应于$\lambda_n$的特征向量空间$L_n$（有限维）上的投影算子。

二、例题、习题与解法

1. 证明$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$，当$K$为实数域时；$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$，当$K$为复数域时。

本题直接利用$\|x\|^2 = (x, x)$代入验证，故略。

2. 设M，N为内积空间U中的子集，且$M \perp N$，证明$N \subset M^\perp, M \subset N^\perp$。

证 因为$M^\perp = \{x: (x, y) = 0, \forall y \in M\}$，$N \perp M$，所以$N \subset M^\perp, M \subset N^\perp$。

3. 设M，N是内积空间U中的子集，$M \subset N$，则$N^\perp \subset M^\perp$。

证 任取$x \in N^\perp$，则对一切$y \in N$有$(x, y) = 0$，利用条

件$M\subset N$，必可得对一切$y\in M$，有$(x, y)=0$，所以$x\in M^{\perp}$，即

$$N^{\perp}\subset M^{\perp}$$

4. 设U是完备的内积空间，M是U的子空间，证明$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}, M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$。

证 因为$M\subset\overline{M}$，由本章第3题得$\overline{M}^{\perp}\subset M^{\perp}$，反之容易证明若$x\in M^{\perp}$，必有$x\perp\overline{M}$，即$M^{\perp}\subset\overline{M}^{\perp}$，故$M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$。

下面证明$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$。$\overline{M}\subset(M^{\perp})^{\perp}$显然成立，反之，对每一个$x\in(M^{\perp})^{\perp}$，分解$x=y+z$，其中$y\in\overline{M}$，$z\in\overline{M}^{\perp}=M^{\perp}$，则

$$0=(x,z)=(z,z)$$

故

$$x=y\in\overline{M}, (M^{\perp})^{\perp}\subset\overline{M}$$

从而$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$

本题中$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$也可应用直交分解$U=M^{\perp}\oplus(M^{\perp})^{\perp}$，$U=\overline{M}\oplus\overline{M}^{\perp}=M^{\perp}\oplus\overline{M}$，从而知$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$。

5. 设L_1，L_2是完备内积空间U的子空间，$L_1\perp L_2$，$L=L_1\oplus L_2$，证明L是闭子空间的充分必要条件是L_1，L_2均为闭子空间。这里$L_1\oplus L_2$表示L_1和L_2的直交和。

证 必要性：设L为闭子空间，$\{x_n\}\subset L_1$，$x_n\longrightarrow x$ $(n\longrightarrow\infty)$，则$x\in L$，且对一切$y\in L_2$，有

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=0$$

所以$x\in L_2^{\perp}$ 因为

$$L=L_1\oplus L_2, \quad x\in L, \quad x\in L_2^{\perp}$$

故$x \in L_1$，L_1为闭子空间。

同理可证L_2是闭子空间。

充分性：设L_1，L_2均为闭子空间，$\{x^{(n)}\} \subset L$，$x^{(n)} \longrightarrow x\ (n \longrightarrow \infty)$，$x \in U$，令

$$x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$$

其中 $x_1^{(n)} \in L_1$，$x_2^{(n)} \in L_2$，U完备，由直交分解定理

$$x = x_1 + x_2$$

其中$x_1 \in L_1$，$x_2 \in L_1^{\perp}$。因为

$$\| x_i^{(n)} - x_i \| \leqslant \| x^{(n)} - x \| \qquad (i = 1, 2)$$

所以 $\quad x_1^{(n)} \longrightarrow x_1 \in L_1$，$x_2^{(n)} \longrightarrow x_2 \in L_2$

故$x \in L_1 \oplus L_2$，即L是闭子空间。

6. 令S_1表如下的函数$x(t)$的全体：

$$x(t) \in L[0, 2\pi]$$

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2) < +\infty$，令

$$\|x\|_{S_1} = \pi^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

求证S_1是Hilbert空间且

$$T: x \longrightarrow \overline{x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

是由S_1到$L^2[0,2\pi]$中的等距算子。（此处S_1，$L[0,2\pi]$，$L^2[0,2\pi]$均为实空间。）

证 首先易知T是$S_1\longrightarrow L^2[0,2\pi]$中的线性算子，因为

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\}$$

是$L^2[0,2\pi]$中的一个完备标准直交系，则由Parseval等式得

$$\|\overline{x}\|_2=\pi^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)\right\}^{\frac{1}{2}}=\|x\|_{S_1}$$

故T是S_1到$L^2[0,2\pi]$中的等距算子。

另一方面，任取$\overline{x}(t)\in L^2[0,2\pi]$，则

$$\overline{x}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

右边级数在$L^2[0,2\pi]$中收敛，令

$$a_n'=\frac{a_n}{\sqrt{n}},\quad b_n'=\frac{b_n}{\sqrt{n}}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

则

$$\overline{x}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{2}}(a_n'\cos nt+b_n'\sin nt)$$

显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)<+\infty$，故存在$x(t)\in L^2[0,2\pi]\subset L[0,2\pi]$，使

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nt+b_n' \sin nt)$$

右边级数在$L^2[0,2\pi]$中收敛，容易证明

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nt+b_n' \sin nt)$$

以及$x(t)\in S_1$，据算子T的定义，有$Tx=\bar{x}$，故T是S_1到$L^2[0,2\pi]$上的等距算子。因为$L^2[0,2\pi]$是Hilbert空间，S_1显然可用范数$\|\cdot\|_{S_1}$定义内积成为一个内积空间，故S_1是Hilbert空间。

7. 设f是完备内积空间U的子空间G上的有界线性泛函，则f在U上存在唯一的延拓F，适合$\|F\|=\|f\|_G$。

证 因为f为G上的有界线性泛函，我们可不妨设G为闭子空间，则G本身可看作一个完备内积空间。$f\in G^*$，必存在$y\in G$，使

$$f(x)=(x,y)\qquad(\forall x\in G)$$

且$\|f\|_G=\|y\|$，现在令

$$F(x)=(x,y)\qquad(\forall x\in U)$$

则F是f的一个延拓，且$\|F\|=\|y\|=\|f\|_G$。下面证明延拓的唯一性。若另有$\bar{F}(x)=(x\ y')$ $(\forall x\in U)$，满足

$$\bar{F}(x)=f(x)=F(x)\qquad(\forall x\in G)$$

$$\|\bar{F}\|=\|f\|_G\quad 即\|y'\|=\|y\|$$

则$x\in G$时

$$(x,y'-y)=\bar{F}(x)-F(x)=0,\quad y'-y\in G^{\perp}$$

显然

$$y'=y+(y'-y)$$

$$\|y'\|^2=\|y\|^2+\|y'-y\|^2$$

故$\|y'-y\|=0$，$y=y'$，唯一性得证。

8. 证明Hilbert空间（可分完备内积空间）中的标准直交系最多是可列的。

证 设$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$为$H$中的标准直交系，则

$$(e_\alpha,e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\\ 1 & \alpha=\beta\end{cases}$$

且$\alpha\neq\beta$时，$\|e_\alpha-e_\beta\|=\sqrt{2}$。因为$H$可分，设$\{x_n\}$为$H$的可数稠子集，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}S(x_n,\ \tfrac{1}{2})\supset H$$

其中$S(x_n,\tfrac{1}{2})=\{x:\ \|x-x_n\|<\tfrac{1}{2}\}$，若$\{e_\alpha\}$不可数，则至少有两个不同的元素$e_\alpha,e_\beta$同属于某一个开球$S(x_n,\tfrac{1}{2})$，于是

$$\sqrt{2}=\|e_\alpha-e_\beta\|\leqslant\|e_\alpha-x_n\|+\|x_n-e_\beta\|<1$$

矛盾，故$\{e_\alpha\}$至多可数。

9. 证明Hilbert空间的完备标准直交系必定是可列的，

证 设$f=\{e_\alpha\}$是H的一个完备标准直交系，首先由上题知f至多可列，现若f为有限集$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，令

$$E=\left\{x=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i,\ c_i\text{为任意实数}\right\}$$

由于f是H的完备直交系，则$E=\overline{E}=H$，这与H为无穷维空间矛盾，故f必定是可列集。

10. 举例说明内积空间中的完全标准直交系不一定是完备的。

解 在l^2中，记 $f=\{e_2,e_3,\cdots,e_n,\cdots\}$

其中 $e_n=\{\overbrace{0,0,\cdots,0,1}^{n\text{位}},0,\cdots\}$，令$f_1=e_1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}e_k$，由 Riesz－Fischer定理（参考文献[2]p172）知，$f_1\in l^2$，再令U是由$f\cup\{f_1\}$所张成的线性子空间，即

$$U=\left\{\alpha_1f_1+\sum_{k=2}^{n}\alpha_ke_k:\ n\text{为任一自然数},\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{为任意实数}\right\}$$

按照l^2的线性运算及内积，U为内积空间，f显然是U中的标准直交系，且可以证明f在U中是完全的。事实上，如果$x\in U$，$x\perp f$，则据U的定义，存在$\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$使得

$$x=\alpha_1f_1+\sum_{k=2}^{n}\alpha_ke_k$$

取$m>n$，得到$0=(x,e_m)=\frac{\alpha_1}{m}$，因此

$$x=\sum_{k=2}^{n}\alpha_ke_k$$

同样，对于$m\leqslant n$，有$0=(x,e_m)=\alpha_m$，故$x=0$，即f在U中完全，但是

$$\|f_1\|^2=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}|(f_1,e_k)|^2=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

则

$$\|f_1\|^2 \neq \sum_{k=2}^{\infty} |(f_1, e_k)|^2$$

即Parseval公式不成立，故f在U中不是完备的。

11. 设 $\{e_k\}$，$\{e_k'\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 是 Hilbert 空间 H中的两个标准直交系，适合$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k - e_k'\|^2 < 1$，则当$\{e_k\}$，$\{e_k'\}$中之一完备时，另一个也是完备的。

证 设$\{e_k\}$完备，我们要证明$\{e_k'\}$也完备，记 $M = \bigvee_{k=1}^{\infty}\{e_k'\}$——表示由$\{e_k'\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$张成的闭子空间，只要证明$x \perp M$时，必有$x=0$。设不然，$x \neq 0$，则

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k - e_k')|^2$$

$$\leqslant \|x\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e_k'\|^2 < \|x\|^2$$

矛盾，故$\{e_k'\}$完备。

［注］本题条件$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k - e_k'\|^2 < 1$可改弱为$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k - e_k'\|^2 < +\infty$。

事实上，若$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k - e_k'\|^2 < +\infty$，则存在$n_0$，使

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|e_k - e_k'\|^2 < 1$$

我们令

$$M=\bigvee_{k=n_0+1}^{\infty}\{e_k'\},\ N=\bigvee_{k=n_0+1}^{\infty}\{e_k\}$$

则

$$H=M\oplus M^{\perp}=N\oplus N^{\perp}$$

显然$M^{\perp}$的维数$\geqslant n_0$，因此，若能证明$\dim M^{\perp}=n_0$，则

$$M^{\perp}=\bigvee_{k=1}^{n_0}\{e_k'\},\ H=\bigvee_{k=1}^{\infty}\{e_k'\},$$

从而$\{e_k'\}$完备。现任取$f\neq 0$，$f\in M^{\perp}$，则

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|(f,e_k)|^2=\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|(f,\ e_k-e_k')|^2<\|f\|^2$$

由此可知$f\overline{\in}N$，令$f=g_1+g_2$，其中$g_1\in N^{\perp}$，$g_2\in N$，则$g_1\neq 0$，记$Pf=g_1$，则P是$M^{\perp}\longrightarrow N^{\perp}$的一对一线性算子，故$M^{\perp}$与$N^{\perp}$的一个子集同构，但$\dim N^{\perp}=n_0$，故$\dim M^{\perp}\leqslant n_0$，从而$\dim M^{\perp}=n_0$，$\{e_k'\}$完备得证。

12. 设U为Hilbert空间，求证：

(i) $$\min_{\substack{C_k\in k\\1\leqslant k\leqslant n}}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ky_k\right\|^2=\frac{G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{G(y_1,y_2,\cdots,y_n)}$$

这里K为复数域，$x,y_1,y_2,\cdots,y_n$为U中的元素，y_1，y_2，$\cdots,y_n$线性无关，而

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots\cdots(y_n,y_1)\\(y_1,y_2) & (y_2,y_2) & \cdots\cdots(y_n,y_2)\\\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\(y_1,y_n) & (y_2,y_n) & \cdots\cdots(y_n,y_n)\end{vmatrix}$$，令

(ii) 对任意的$m<n$,

$$\frac{G(y_k,y_{k+1},\cdots,y_n)}{G(y_{k+1},\cdots,y_n)}\leqslant\frac{G(y_k,y_{k+1},\cdots,y_m)}{G(y_{k+1},\cdots,y_m)}$$

$$(0\leqslant k\leqslant m-1)$$

$$\frac{G(y_m,y_{m+1},\cdots,y_n)}{G(y_{m+1},\cdots,y_n)}\leqslant G(y_m)$$

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1,\cdots,y_m)G(y_{m+1},\cdots,y_n)$$

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1)G(y_2)\cdots G(y_n)$$

证 (i)令$M=\left\{y=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k,\ c_k\in K,k=1,2,\cdots,n\right\}$——有穷维空间，则$M$是$U$的一个闭子空间，$U=M\oplus M^{\perp}$，当$x\in M$时，(i)显然成立。下面设$x\in U-M$，首先容易证明对于$x\in U-M$，欲使$y\in M$与$x$有最短距离的充要条件是$x-y\perp M$。现设$x\in U-M$，由直交分解定理，$x=y+z$，其中$y\in M$，$z=x-y\perp M$，

$$\|x-y\|=\min\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k y_k\|$$

$y\in M$，则

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$$

由条件$x-y\perp M$可得

$$\begin{cases}c_1(y_1,y_1)+c_2(y_2,y_1)+\cdots+c_n(y_n,y_1)=(x,y_1)\\c_1(y_1,y_2)+c_2(y_2,y_2)+\cdots+c_n(y_n,y_2)=(x,y_2)\\\cdots\cdots\cdots\quad\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\c_1(y_1,y_n)+c_2(y_2,y_n)+\cdots+c_n(y_n,y_n)=(x,y_n)\end{cases}\tag{1}$$

$\delta^2=\|x-y\|^2$，则

$$\delta^2=(x-y,x-y)=(x,x)-(y,x)-(x,y)+(y,y)$$
$$=(x,x)-(y,x)$$

即

$$c_1(y_1,x)+c_2(y_2,x)+\cdots+c_n(y_n,x)=(x,x)-\delta^2 \quad (2)$$

将(1)和(2)联立，看作$(n+1)$个未知数的齐次方程，有非零解$c_1,c_2,\cdots,c_n,1$，则必有

$$\begin{vmatrix} (y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots\cdots & (y_n,y_1) & -(x,y_1) \\ (y_1,y_2) & (y_2,y_2) & \cdots\cdots & (y_n,y_2) & -(x,y_2) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (y_1,y_n) & (y_2,y_n) & \cdots\cdots & (y_n,y_n) & -(x,y_n) \\ (y_1,x) & (y_2,x) & \cdots\cdots & (y_n,x) & \delta^2-(x,x) \end{vmatrix}=0$$

即

$$\delta^2 G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=G(y_1,y_2,\cdots,y_n,x)$$
$$=G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

故(i)成立。

(ii)设$m<n$，$\{y_{k+1},y_{k+2},\cdots,y_n\}$及$\{y_{k+1},y_{k+2},\cdots,y_m\}$分别张成闭子空间$M_1$和$M_2$，显然$M_2\subset M_1$，令

$$\delta_1^2=\inf_{y\in M_1}\|y_k-y\|^2, \qquad \delta_2^2=\inf_{y\in M_2}\|y_k-y\|^2$$

则

$$\delta_1^2\leqslant\delta_2^2$$

故

$$\frac{G(y_k,y_{k+1},\cdots,y_n)}{G(y_{k+1},\cdots,y_n)}\leqslant\frac{G(y_k,y_{k+1},\cdots,y_m)}{G(y_{k+1},\cdots,y_m)} \qquad (3)$$

再令

$$M=\left\{x=\sum_{k=m+1}^{n} c_k y_k,\ c_k\in K\right\}$$

则显然有

$$\inf_{y\in M}\|y_m-y\|^2\leqslant\|y_m\|^2$$

所以

$$\frac{G(y_m,y_{m+1},\cdots,y_n)}{G(y_{m+1},\cdots,y_n)}\leqslant G(y_m) \qquad (4)$$

由（3）、（4）可得

$$\frac{G(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{G(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\leqslant\frac{G(y_2,y_3,\cdots,y_n)}{G(y_2,y_3,\cdots,y_m)}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\frac{G(y_m,y_{m+1},\cdots,y_n)}{G(y_m)}\leqslant G(y_{m+1},y_{m+2},\cdots,y_n)$$

所以

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1,y_2,\cdots,y_m)\cdot G(y_{m+1},y_{m+2},\cdots,y_n)$$

从而成立

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1)G(y_2)\cdots G(y_n)$$

13. 设U为Hilbert空间，$\{y_k\}\subset U\ (k=1,2,3,\cdots)$，其中任意有限个元是线性无关的，则将$\{y_k\}$标准直交化所得的元素列可以表成

$$e_k=\frac{1}{\sqrt{G_kG_{k-1}}}\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & \cdots\cdots & (y_k,y_1)\\(y_1,y_2) & \cdots\cdots & (y_k,y_2)\\\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\(y_1,y_{k-1}) & \cdots\cdots & (y_k,y_{k-1})\\y_1 & \cdots\cdots & y_k\end{vmatrix}$$

其中$G_0=1$，$G_k=G(y_1,y_2,\cdots,y_k)$。

证　首先用归纳法证明$\{e_k\}$为标准直交系。

$$e_1=\frac{y_1}{\|y_1\|},\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{G_2G_1}}\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & (y_2,y_1)\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$$

$$e_2\perp e_1 \Leftrightarrow e_2\perp y_1$$

显然有$(e_2,y_1)=0$，故$e_2\perp e_1$。一般地，设$e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$相互直交，要证明e_k与$e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$直交等价于证明e_k与$y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}$直交，其中

$$e_k=\frac{1}{\sqrt{G_kG_{k-1}}}\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & \cdots\cdots & (y_k,y_1)\\ (y_1,y_2) & \cdots\cdots & (y_k,y_2)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ (y_1,y_{k-1}) & \cdots\cdots & (y_k,y_{k-1})\\ y_1 & \cdots\cdots & y_k\end{vmatrix}$$

由于

$$(e_k,y_i)=\frac{1}{\sqrt{G_kG_{k-1}}}\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & \cdots\cdots & (y_k,y_1)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ (y_1,y_{k-1}) & \cdots\cdots & (y_k,y_{k-1})\\ (y_1,y_i) & \cdots\cdots & (y_k,y_i)\end{vmatrix}=0$$

$(i=1,2,\cdots,k-1)$，故e_k与$e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$直交。

下面再证明$\|e_k\|=1\ (k=1,2,3,\cdots)$。令

$$u_k=\sqrt{G_kG_{k-1}}\ e_k$$

则

$$\|e_k\|=1\Leftrightarrow\|u_k\|=\sqrt{G_kG_{k-1}}$$

记
$$u_k=a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ky_k$$

$$\|u_k\|=\sqrt{(u_k,a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ky_k)}$$

因为$u_k \perp y_i$（$i=1,2,\cdots,k-1$），所以

$$\|u_k\| = \sqrt{a_1 a_k (y_1, y_k) + \cdots + a_k^2 (y_k, y_k)}$$

据G_k的定义，我们有

$$a_k = G_{k-1},\quad G_k = a_1 (y_1, y_k) + \cdots + a_k (y_k, y_k)$$

所以

$$\sqrt{G_k G_{k-1}} = \sqrt{a_1 a_k (y_1, y_k) + \cdots + a_k^2 (y_k, y_k)}$$

$$= \|u_k\|$$

故$\|e_k\| = 1$（$k=1,2,3,\cdots$）。

最后证明$\{e_k\}$就是由$\{y_k\}$按参考文献[2]p176定理1.8得到的 标准直交系。为此，设$\{e_k'\}$是由$\{y_k\}$按定理1.8作出的标准直交系，易知e_k'与$y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}$直交，$e_1 = e_1'$，记

$$e_k' = \alpha_k' y_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j' y_j$$

$$e_k = \alpha_k y_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j y_j$$

其中α_k, α_k' 均为正数（$k=2,3,4,\cdots$），则

$$e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_k'} e_k' = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j y_j$$

从而

$$\left(e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_k'} e_k' ,\ e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_k'} e_k' \right) = 0$$

即$e_k=\dfrac{\alpha_k}{\alpha_k'}e_k'$。由于$\|e_k\|=\|e_k'\|=1$，$\dfrac{\alpha_k}{\alpha_k'}>0$，故

$$e_k=e_k'\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

14. 称$H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$为艾尔米特多项式，

令

$$e_n(t)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)\ (n=1,2,3,\cdots)$$

证明$\{e_n\}$组成$L^2(-\infty,+\infty)$中的一个完备的标准直交系。

证 首先证明$\{e_n(t)\}$彼此直交。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e_n(t)e_m(t)dt=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}(2^m m!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}H_n(t)H_m(t)dt$$

用数学归纳法可证明

$$H_n(t)=n!\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!}t^{n-2j}$$

$$=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{j!}n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}$$

其中

$$N=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{当}n\text{为偶数时}\\[2ex] \dfrac{n-1}{2} & \text{当}n\text{为奇数时}\end{cases}$$

所以

$$H_n'(t)=2n\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j}{j!}(n-1)(n-2)\cdots$$

$$\times (n-2j)(2t)^{n-1-2j}=2nH_{n-1}(t)$$

其中

$$M=\begin{cases}\dfrac{n-2}{2} & \text{当}n\text{为偶数时}\\[2ex] \dfrac{n-1}{2} & \text{当}n\text{为奇数时}\end{cases}$$

令$v(t)=e^{-t^2}$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_m(t)e_n(t)dt=\left\{(2^n n!\sqrt{\pi})(2^m m!\sqrt{\pi})\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)v^{(n)}(t)dt$$

又因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)v^{(n)}(t)dt=H_m v^{(n-1)}(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} 2mH_{m-1}(t)v^{(n-1)}(t)dt$$

$$=-2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t)v^{(n-1)}(t)dt=\cdots\cdots$$

$$=(-1)^m 2^m\ m!\int_{-\infty}^{\infty} H_0(t)v^{(n-m)}(t)dt$$

$$=(-1)^m 2^m\ m!\int_{-\infty}^{\infty} v^{(n-m)}(t)dt$$

故当$n=m$时

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_m(t)e_n(t)dt=1$$

$n\neq m$时，不妨设$m<n$，由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)v^{(n)}(t)dt=(-1)^m 2^m\ m!\int_{-\infty}^{\infty} v^{(n-m)}(t)dt$$

$$=(-1)^m\ 2^m\ m!\ v^{(n-m-1)}(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n(t)e_m(t)dt = 0 \qquad (n\neq m)$$

这就证明了$\{e_n(t)\}$是$L^2(-\infty,+\infty)$中的标准直交系。我们还可以证明$\left\{t^k e^{-t^2/2}\right\}_{k=0}^{\infty}$是$L^2(-\infty,+\infty)$的一个完全系(可参阅参考文献[6]p121—122)，由此可知：$\{P(t)e^{-t^2/2}$：$P(t)$为任一多项式$\}$在$L^2(-\infty,+\infty)$中稠密，故$\{e_n(t)\}$是$L^2(-\infty,+\infty)$的完备标准直交系。

15. 设P是完备内积空间U的闭子空间L上的投影算子，则$Px=x$的充分必要条件是$x\in L$；$Px=0$的充分必要条件是$x\perp L$。

证 任取$x\in U$，据直交分解定理，可唯一地表成

$$x = x_1 + x_2$$

其中$x_1\in L$，$x_2\perp L$，$Px=x$，故

$$Px=x\Leftrightarrow x\in L,\quad Px=0\Leftrightarrow x\perp L$$

16. 设$\{e_k\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$是完备内积空间U中的标准直交系，L是$\{e_k\}$张成的线性子空间，证明$\overline{L}$上的投影算子P可表成

$$Px=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k \qquad (x\in U)$$

证 $x\in U$，$Px\in\overline{L}$，由于$\overline{L}$本身可视为完备内积空间，则据参考文献[2]p173定理1.6立即知$\{e_k\}$是$\overline{L}$中的完备标准直交系，故

$$Px=\sum_{k=1}^{\infty}(Px,e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k \quad (\forall x\in U)$$

17. 设P_1，P_2为可换的投影算子，则$P=P_1+P_2-$

P_1P_2也是投影算子，且$P \geqslant P_1$，$P \geqslant P_2$。当任一投影算子Q满足$Q \geqslant P_1$，$Q \geqslant P_2$时，则必满足$Q \geqslant P$。

证 $P = P^*$，$P = P^2$以及$PP_2 = P_2$，$PP_1 = P_1$均可直接验证，由参考文献[2]定理2.7及定理2.10立即可知P是一投影算子，且$P \geqslant P_1$，$P \geqslant P_2$。

由

$$Q \geqslant P_1 \Leftrightarrow QP_1 = P_1；\ Q \geqslant P_2 \Leftrightarrow QP_2 = P_2$$

立即得$QP = P$，故$Q \geqslant P$。

18. 设T为完备内积空间U中的有界线性算子，且$\|T\| \leqslant 1$，证明

$$\{x：Tx = x\} = \{x：T^*x = x\}$$

证 记$M = \{x：Tx = x\}$，$N = \{x：T^*x = x\}$，任取$x \in M$，则

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (T^*x - x,\ T^*x - x) &= \|T^*x\|^2 - \|x\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

故$T^*x = x$，$M \subset N$。同理可证$N \subset M$，因此$M = N$。

19. 设A是复内积空间U上的有界线性算子，如果对每个$x \in U$，$(Ax, x) = 0$，则$A = 0$。对于实空间，此结果成立否？如果A是自伴的，则不论U是实是复，只要$(Ax, x) = 0$（$\forall x \in U$），就有$A = 0$。

证 对于复空间，由条件$(Ax, x) = 0$（$\forall x \in U$），并利用等式

$$\begin{aligned} (Ax, y) = \frac{1}{4}[&(A(x+y), x+y) - (A(x-y),\ x-y) \\ &+ i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy)] \end{aligned}$$

我们取$y = Ax$，就得$Ax = 0$（$\forall x \in U$），故$A = 0$。

对于实空间不一定成立，例如，在二维平面上的旋转变

换A：$(x,y)\longrightarrow(x',y')$

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$$

记$u=(x,y)$，$Au=(x',y')$，则

$$(Au,\ u)=x'x+y'y=yx-xy=0 \qquad (\forall u\in R^2)$$

但显然$A\neq 0$。

当A为自伴算子时，对实空间U，我们利用等式

$$(Ax,y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)]$$

即得

$$(Ax,y)=0 \qquad (\forall x,y\in U)$$

故不论U是实的还是复的，均有$A=0$。

20. 设A，B是完备内积空间U上的线性算子，适合

$$(Ax,y)=(x,By)$$

其中$x,y\in U$，则A是有界的。

证 为了证明A有界，我们只要证明A是闭算子，设

$$x_n\longrightarrow x,\ Ax_n\longrightarrow z \qquad (n\longrightarrow\infty)$$

则对一切$y\in U$，

$$(z,y)=\lim_{n\to\infty}(Ax_n,\ y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\ By)$$
$$=(x,By)=(Ax,y)$$

所以$Ax=z$，A是闭线性算子。

21. 设T为定义在完备内积空间U上的有界线性算子，令N为T的零空间，M为T^*的值域，证明$N=M^{\perp}$。

证 $N=\{x\in U：Tx=0\}$，$M=\{T^*x：x\in U\}$，任取$y\in N$，对每个$z=T^*x\in M$，

$$(y,z)=(y,T^*x)=(Ty,x)=0$$

故$N\subset M^{\perp}$. 反之，任取$y\in M^{\perp}$，则

$$(y,T^*x)=(Ty,x)=0\quad(\forall x\in U)$$

故$Ty=0$，即

$$y\in N,\ M^{\perp}\subset N$$

因此$N=M^{\perp}$.

22. 设U为完备内积空间，T为U上的有界线性算子，若对一切$x\in U$，$\mathrm{Re}(Tx,\ x)=0$，则$T=-T^*$.

证 令$B=T+T^*$，则$B^*=B$，B为自伴算子，任取$x\in U$，

$$(Bx,x)=(Tx,x)+(T^*x,x)=2\mathrm{Re}(Tx,x)$$

由题给条件得$(Bx,x)=0\ (\forall x\in U)$，再据本章第 19题知$B=0$，故$T=-T^*$.

23. 设T为l^2上的有界线性算子，对$x=\{\xi_k\}$，$Tx=y=\{\eta_k\}$，其中

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}\xi_j\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

再设$T^*x=y^*=\{y_k^*\}$，而

$$y_k^*=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^*\xi_j$$

证明 $a_{kj}^*=\overline{a_{jk}}$.

证 令$e_n=(\overbrace{0,0,\cdots,0,\ 1}^{n\text{位}},0,\cdots)\in l^2,(n=1,2,3,\cdots\cdots)$，则$a_{kj}=(Te_j,\ e_k)$，$a_{kj}^*=(T^*e_j,e_k)=(e_j,Te_k)=\overline{(Te_k,\ e_j)}$

$=\overline{a_{jk}}$.

24. 设$\{e_n\}$是完备内积空间U中的标准直交系，$\{\lambda_n\}$

$\longrightarrow 0$ ($n\to\infty$)，且每个λ_n是实数，令

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,\ e_n)e_n$$

则T是全连续自伴算子。

证 令$T_nx=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x,\ e_k)e_k$，容易证明$T_n$是定义在$U$上的有界对称算子，$\|T_n\|\leqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k|$，而且$T_n$是有穷秩算子。因为

$$\|(T_n-T)x\|^2=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k(x,e_k)e_k,\ \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k(x,\ e_k)e_k\right)$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k^2\left|(x,\ e_k)\right|^2\leqslant\max_{n+1\leqslant k<\infty}\lambda_k^2\ \|x\|^2$$

所以

$$\|T_n-T\|\leqslant\sqrt{\max_{n+1\leqslant k<\infty}\lambda_k^2}$$

由条件$\lambda_k\to 0(k\to\infty)$，立即得

$$\|T_n-T\|\longrightarrow 0\qquad (n\to\infty)$$

故T是全连续算子。T的对称性由下式可知：

$$(Tx,y)=\lim_{n\to\infty}(T_nx,y)=\lim_{n\to\infty}(x,T_ny)$$

$$=(x,Ty)$$

($\forall x,\ y\in U$)，故T为全连续自伴算子。

25. 设T为$L^2[a,b]$上的全连续自伴算子，而且有

$L^2[a, b]$中的完备标准直交系$\{e_n\}$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$$

证明： 必存在$a \leqslant t \leqslant b$，$a \leqslant s \leqslant b$ 上可测的平方可积函数$K(t, s)$适合：

$$\overline{K(s,t)} = K(t,s)$$

且对一切$x(t) \in L^2[a,b]$，

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

证 由于T是$L^2[a,b]$上的全连续自伴算子，则必存在完备标准直交系$\{\varphi_n\}$，使$T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$，其中$\lambda_n (n=1,2,3,\cdots)$为$T$的特征值，$\lambda_n$均为实数，则

$$e_k = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k)} \varphi_n \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

其中$C_n^{(k)} = (e_k, \varphi_n)$ （k，$n=1,2,3,\cdots$），于是

$$\|Te_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n^{(k)}|^2 \cdot |\lambda_n|^2$$

由于$\varphi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{C_n^{(k)}} e_k$，$\{e_k\}$完备，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_n^{(k)}|^2 = \|\varphi_n\|^2 = 1$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |C_n^{(k)}|^2 \cdot |\lambda_n|^2 \right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|C_n^{(k)}|^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty$$

令

$$K(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t)\varphi_n(s)$$

则

$$\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^2dt\,ds=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty$$

且

$$\overline{K(s,\ t)}=K(t,s)$$

$$T\varphi_n(t)=\lambda_n\varphi_n(t)=\int_a^b K(t,s)\varphi_n(s)ds$$

由于 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的完备标准直交系，故对一切 $x(t)\in L^2[a,b]$有

$$Tx(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

26. 设T为Hilbert空间U上的有界线性算子，$\{e_n\}$为U中完备的标准直交系，若对任何m，n，有$(Te_n,e_m)=\overline{(Te_m,e_n)}$，则$T$自伴。

证 任取x，$y\in U$，由于$\{e_n\}$是U中的完备标准直交系，所以

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)e_k,\quad y=\sum_{k=1}^{\infty}(y,\ e_k)e_k$$

令$x_n=\sum_{k=1}^{n}(x,\ e_k)e_k$，　$y_n=\sum_{k=1}^{n}(y,\ e_k)e_k$，据条件

$$(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)} = (e_n, Te_m)$$

可得

$$(Tx_n, y_n) = (x_n, Ty_n)$$

故$(Tx,\ y) = (x,\ Ty)$ $(\forall x,\ y \in U)$，T是自伴算子。

27. 有界线性算子T称为正规的，是指$T^*T = TT^*$.证明当T为正规算子时，$\|T^*T\| = \|T^2\|$.

证 因为

$$\|Tx\|^2 = (Tx,\ Tx) = (T^*Tx,\ x)$$
$$= (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2$$

故

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \qquad (\forall x \in U)$$

从而

$$\|T^*Tx\| = \|T^2x\| \quad (\forall x \in U)$$

于是

$$\|T^*T\| = \|T^2\|$$

实际上我们还可以证明$\|T^*T\| = \|T\|^2$.

28. T为正规算子的充分必要条件是T可表为$T = T_1 + iT_2$，其中T_1、T_2为可换自伴算子。

证 充分性显然，现证必要性。设T正规，我们令

$$T_1 = \frac{T + T^*}{2} \qquad T_2 = \frac{T - T^*}{2i}$$

则易证$T = T_1 + iT_2$，且T_1，T_2为可换的自伴算子，这种表示还是唯一的。

29. 设T为定义在复完备内积空间U上的有界线性算子，如果存在$\alpha_0 > 0$，使$(Tx, x) \geqslant \alpha_0(x, x)$，则称$T$为正定的。证明凡正定算子必有有界逆算子$T^{-1}$，且$\|T^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha_0}$.

证 设$Tx = 0$，由于$0 = (Tx, x) \geqslant \alpha_0(x, x)$，则$x = 0$，故

T^{-1}存在。又从$\alpha_0\|x\|^2\leqslant\|Tx\|\cdot\|x\|$可得

$$\|Tx\|\geqslant\alpha_0\|x\| \qquad (\forall x\in U)$$

故T^{-1}有界，且$\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha_0}$.

最后证明$T^{-1}\in\mathscr{B}(U)$. 即证明$R(T)=U$.利用T正定必自伴，得$N(T)=R(T)^{\perp}$，因此$\overline{R(T)}=U$. 又因为T^{-1}有界，T为闭算子，则必有

$$R(T)=\overline{R(T)}=U$$

故$T^{-1}\in\mathscr{B}(U)$.

30. 设U为Hilbert空间，T是U上的自伴算子，又设有$x_0\in U$使$\{x_0,Tx_0,T^2x_0,\cdots,T^nx_0,\cdots\}$张成的子空间在$U$中稠密。设$\{E_\lambda\}$是$T$的谱族，令$\sigma(\lambda)=(E_\lambda x_0,x_0)$，证明必存在$L^2(\sigma)$到$U$上的等距同构映射$A$，使得当$f\in L^2(\sigma)$时，

$$(A^{-1}TA)f(t)=t\,f(t)$$

证 因为$\sigma(\lambda)=(E_\lambda x_0,\ x_0)$是单调上升右连续函数，由它可定义一个全有限的$LS$测度$\sigma$，令$\mathscr{P}$为多项式全体，则$\mathscr{P}\subset L^2(\sigma)$。作$\mathscr{P}$到$U$中的等距算子$A$如下：

$$Ap(t)=P(T)x_0 \tag{1}$$

此处$p(t)$是任一多项式，由于

$$\begin{aligned}(Ap(t),Ap(t))&=(P(T)x_0,P(T)x_0)\\&=\int_{m-0}^{M}|p(t)|^2d(E_\lambda x_0,x_0)\\&=\int_{m-0}^{M}|p(t)|^2d\sigma\end{aligned}$$

其中m, M为自伴算子T的下界和上界，故A是等距算子。

由于$\mathscr{P}$在$L^2(\sigma)$中稠密，故A可唯一地延拓成$L^2(\sigma)$到U中的等距算子。又因为U完备，易知$AL^2(\sigma)$是U中的闭子空间，但$AL^2(\sigma)$至少包含了

$$\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \cdots, T^nx_0, \cdots\}$$

据题设，$AL^2(\sigma)=U$，即A是$L^2(\sigma)$到U上的保范算子。由(1)式得

$$p(t)=A^{-1}P(T)x_0 \qquad (p(t)\in\mathscr{P})$$

所以

$$(A^{-1}TA)p(t)=A^{-1}TP(T)x_0=tp(t) \qquad (\forall p(t)\in\mathscr{P})$$

利用$\mathscr{P}$在$L^2(\sigma)$中稠密，$A^{-1}TA$为有界线性算子，不难证明对一切$f\in L^2(\sigma)$有

$$(A^{-1}TA)f(t)=tf(t) \tag{2}$$

(2)式说明了自伴算子T酉等价于$L^2(\sigma)$中的乘法算子。

31. 设$T=\int_{m-0}^{M}\lambda dE_\lambda$，对$x\in U$，$\|x\|=1$，令$\alpha_x=(Tx,x)$，$\beta_x=\|Tx\|$，则$\beta_x^2\geqslant\alpha_x^2$，且对任意的$\varepsilon>0$，必存在$\lambda_0\in\sigma(T)$，使

$$\alpha_x-\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}-\varepsilon\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}+\varepsilon$$

证 本题我们利用LS积分证明更强的结论：

$$\alpha_x-\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}$$

因为

$$\alpha_x=(Tx,x)=\int_{m-0}^{M}\lambda d(E_\lambda x,x)$$

$$\beta_{\bullet}^2=\int_{m-0}^{M}\lambda^2 d(E_{\lambda}x,x)$$

所以

$$\|(T-\alpha_{\bullet}I)x\|^2=\int_{m-0}^{M}(\lambda^2-\alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2$$

$$=\beta_{\bullet}^2-\alpha_{\bullet}^2\geqslant 0$$

利用LS积分性质

$$\int_{m-0}^{M}(\lambda-\alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2=\int_{\sigma(T)}(\lambda-\alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2$$

则

$$\beta_{\bullet}^2-\alpha_{\bullet}^2=\int_{\sigma(T)}(\lambda-\alpha_{\bullet})^2 d\|E_{\lambda}x\|^2\geqslant \inf_{\lambda\in\sigma(T)}(\lambda-\alpha_{\bullet})^2$$

由于$\sigma(T)$是直线上的有界闭集，故必存在$\lambda_0\in\sigma(T)$，使

$$\beta_{\bullet}^2-\alpha_{\bullet}^2\geqslant(\lambda_0-\alpha_{\bullet})^2$$

即存在$\lambda_0\in\sigma(T)$，使

$$\alpha_{\bullet}-\sqrt{\beta_{\bullet}^2-\alpha_{\bullet}^2}\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_{\bullet}+\sqrt{\beta_{\bullet}^2-\alpha_{\bullet}^2}$$

32. 设T是完备内积空间U上的自伴算子，$\{E_{\lambda}\}$为T的谱族，证明T的值域闭包是$[(I-E_0)+E_{-0}](U)$。

证 令$N(T)=\{x\in U;\ Tx=0\}$，则据参考文献[2] p211定理2.16(i)的证明可知

$$N(T)=(E_0-E_{-0})(U)$$

记$R(T)=\{Tx;\ x\in U\}$，由本章第21题可得

$$N(T)=R(T)^{\perp}$$

故

$$\overline{R(T)}=N(T)^{\perp}=[I-(E_0-E_{-0})](U)$$
$$=[(I-E_0)+E_{-0}](U)$$

33. 设$\{\alpha_n\}$是实数列且$\sup\limits_n|\alpha_n|<+\infty$，在$l^2$中令

$$Tx=y, \qquad \eta_n=\alpha_n\zeta_n$$

其中：$x=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots\}$，　$y=\{\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n,\cdots\}$。证明$\sigma(T)$等于$\{\alpha_n\}$的闭包，每个$\alpha_n$是$T$的特征值，$T$的谱族$E_\lambda$满足下面的关系：

$$(E_\lambda x,\ y)=\sum_{\alpha_i\leqslant\lambda}\zeta_i\overline{\eta_i}$$

证　每个α_n显然是自伴算子T的特征值，且对应于α_n的特征向量是e_n张成的一维子空间H_n，显然$n\neq m$时，$H_n\perp H_m$。

若$\lambda\overline{\in}\{\overline{\alpha_n}\}$，则

$$\inf_n|\lambda-\alpha_n|=d>0,\ \|(\lambda-T)x\|\geqslant d\|x\|$$

且　　$$R(T_\lambda)=l^2$$

故$\lambda\in\rho(T)$，从而$\sigma(T)=\overline{\{\alpha_n\}}$。我们令$P_n$为$H_n$上的投影算子，则$P_n$彼此直交，且

$$\sum_{i=1}^{\infty}P_i=I,\ x=\{\zeta_i\}\in l^2,\ P_ix=\zeta_ie_i$$

令$E_\lambda=\sum\limits_{\alpha_i\leqslant\lambda}P_i$，容易验证$E_\lambda$满足谱族的三个条件以及

$$(Tx,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta_n\overline{\eta_n}=\int_{m-0}^{M}\lambda d(E_\lambda x,\ y)$$

其中$m=\inf\limits_n \alpha_n$，$M=\sup\limits_n \alpha_n$。故$\{E_\lambda\}$是T的谱族，$\{E_\lambda\}$满足关系：

$$(E_\lambda x,\ y)=\sum_{\alpha_i\leqslant\lambda}\zeta_i\overline{\eta_i}$$

34. 证明Hilbert 空间H中的任何闭凸子集A含有最小范数的元素（即存在$x_0\in A$，使$\|x_0\|=\inf\limits_{x\in A}\|x\|$）。

证 设A为Hilbert 空间H中的闭凸子集，我们令

$$\alpha=\inf_{x\in A}\|x\|$$

则存在点列$\{x_n\}\subset A$，使

$$\|x_n\|\longrightarrow\alpha\qquad(n\to\infty)$$

因为$\dfrac{x_n+x_m}{2}\in A$，所以

$$\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|\geqslant\alpha$$

按照中线公式可得

$$\|x_m-x_n\|^2=\|x_m+(-x_n)\|^2$$

$$=2\|x_m\|^2+2\|x_n\|^2-4\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2$$

$$\leqslant2\|x_m\|^2+2\|x_n\|^2-4\alpha$$

因为当m，$n\to\infty$时，$\|x_m\|\to\alpha$，$\|x_n\|\to\alpha$，故

$$\|x_m-x_n\|\longrightarrow0\qquad(n,\ m\to\infty)$$

即$\{x_n\}$是H中的基本列。于是$x_n\to x_0\in A$，$\|x_0\|=\inf\limits_{x\in A}\|x\|$。

35. 证明内积空间是一致凸的。

证 任给$\varepsilon>0$，$\|x\|=\|y\|=1$，设$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$，则

$$\|x-y\|^2=2-(y,x)-(x,y)\geqslant\varepsilon^2$$

即

$$(y,x)+(x,y)\leqslant 2-\varepsilon^2$$

从而

$$\|x+y\|^2\leqslant 4-\varepsilon^2$$

我们取$0<\delta<2$，使得

$$y^2-4\delta+\varepsilon^2=0$$

则得

$$\|x+y\|^2\leqslant 4-4\delta+\delta^2=(2-\delta)^2$$

即

$$\|x+y\|\leqslant 2-\delta$$

故内积空间是一致凸的。

36. 试求作用于复l^2空间的算子T的共轭算子，其中$T(x_1,x_2,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots)$，$(x_n)\in l^2$。

答 $T^*(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,\ x_3,\ x_4,\ \cdots)$

37. 试求作用于$L^2(0,\ 1)$的算子的共轭算子。

(i) $Ax(t)=\displaystyle\int_0^t x(s)ds$；

(ii) $Ax(t)=\alpha(t)x(t)$，其中$\alpha(t)$为给定的实有界可测函数。

答 (i) $A^*y(t)=\displaystyle\int_t^1 y(s)ds$；

(ii) $A^*y(t)=\alpha(t)y(t)$。

38. 设H为Hilbert空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，证明$R(T)\subset N(T^*)^\perp$，并举例说明严格包含关系能够成立。这里$R(T)$，$N(T)$分别表示T的值域和零空间。

39. 设H为Hilbert空间，$T,S\in\mathscr{B}(H)$，试证明

(i) 若T紧，且$S^*S\leqslant T^*T$，则S是紧算子；

(ii) 若存在常数$c>0$，使得对一切$x\in H$，有

$$\|Tx\|\geqslant c\|x\|$$

则T不是紧算子。

40. 设 H 为Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，T^* 为 T 的Hilbert 共轭算子，证明T为紧算子的充分必要条件是T^*T为紧算子。

41. 设算子 T ：复 $l^2\to l^2$ ，$x=\{\xi_k\}\in l^2$，$Tx=\{0,\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2}\cdots\}$，试证明和计算：

(i) T是全连续算子；

(ii) 求出$\|T\|$和$\sigma(T)$；

(iii) 证明$0\in\sigma_r(T)$。

42. 设 H 是实 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，若对一切$x\in H$，有

$$(Tx,x)\geqslant a(x,x)$$

其中a 为大于零的常数，则$T^{-1}\in\mathscr{B}(H)$，且$\|T^{-1}\|\leqslant a^{-1}$。

43. 设H是 Hilbert 空间，G为H的真闭子空间，则存在$y\in H$，$\|y\|=1$，使得

$$\rho(y,G)=\inf_{z\in G}\|y-z\|\geqslant 1$$

44. 设$l^2(T)=\{a(t)$：$a(t)$是定义在T上的复值函数，至多有可数个点使$a(t)\neq 0$，且$\sum\limits_t|a(t)|^2<\infty\}$，在$l^2(T)$中线性运算与通常的函数空间相同，定义内积如下：

$$\Big(a(t),\ b(t)\Big)=\sum_t a(t)\overline{b(t)}$$

若$T=[0,1]$，试证明 $l^2(T)$是不可分的完备内积空间。

提示 关于$l^2(T)$的不可分性，考察

$M=\{a_\alpha(t)$：$\alpha\in[0,1],a_\alpha(\alpha)=1,t\neq\alpha$ 时，$a_\alpha(t)=0\}$

45. 设X_1，X_2和X均为赋范线性空间，称φ：$X_1\times X_2\longrightarrow X$为双线性映射，若$\varphi$满足

$$\varphi(x_1+x_2,y)=\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y);\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y);$$
$$\varphi(x,y_1+y_2)=\varphi(x,y_1)+\varphi(x,y_2);\varphi(x,\lambda y)=\lambda\varphi(x,y).$$

称φ：$X_1\times X_2\longrightarrow X$是半双线性映射，若$\varphi$满足

$$\varphi(x_1+x_2,y)=\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y);\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y);$$
$$\varphi(x,y_1+y_2)=\varphi(x,y_1)+\varphi(x,y_2);\quad \varphi(x,\lambda y)=\bar{\lambda}\varphi(x,y).$$

特别地，若$X=C$，则分别称φ为$X_1\times X_2$上的双线性型和半双线性型。

设φ：$X_1\times X_2\rightarrow X$是双线性映射，对每个$x\in X_1$，$\varphi_x(y)=\varphi(x,\ y)$关于$y$是连续的，对每个$y\in X_2$，$\varphi^y(x)=\varphi(x,\ y)$关于$x$是连续的，又若$X_1$或$X_2$完备，则$\varphi$是有界的(即存在$M>0$，使对一切$x\in X_1$，$y\in X_2$，有$\|\varphi(x,\ y)\|\leqslant M\|x\|\cdot\|y\|$)。

46. 设X_1，X为赋范线性空间，$X_2=X^*$，$T\in\mathscr{B}(X_1,X)$，$f\in X^*$，令$\phi_T(x,\ f)=f(Tx)$，则$\varphi_T(x,\ f)$是$X_1\times X_2$上的有界双线性型，试证明

(i) $\|\phi_T\|=\|T\|$

(这里$\|\phi_T\|=\sup\{|\phi_T(x,\ f)|:\ \|x\|\leqslant 1,\ \|f\|\leqslant 1\}$)；

(ii) 映射l：$T\rightarrow\phi_T$是$\mathscr{B}(X_1,\ X_2)\rightarrow\mathscr{B}(X_1,\ X_2;\ C)$中的等距线性映射，这里$\mathscr{B}(X_1,\ X_2;\ C)$表示$X_1\times X_2$上的有界双线性型全体；

(iii) 若X自反，则映射l：$T\rightarrow\phi_T$是满射的。

47. 设X_1，X_2为赋范线性空间，X是Banach空间，则$\mathscr{B}(X_1,\ X_2;\ X)$也是Banach空间。

48. 设U为内积空间，令$\phi_T(x,y)=(Tx,y)$，其中

$T\in\mathscr{B}(U)$，则$\|\phi_T\|=\|T\|$。

49．设 H 是 Hilbert 空间，对$H\times H$上的任一有界半双线型 $\varphi(x,y)$，必存在唯一的$T\in\mathscr{B}(H)$，使对一切 x，$y\in H$，有

$$\varphi(x,y)=(Tx,y)$$

且

$$\|\varphi\|=\|T\|=\|\phi_T\|$$

其中$\phi_T(x,y)=(Tx,y)$。

50．设H为Hilbert空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，T正常，则存在酉算子U，使$T^*=UT$。

提示 利用正常算子性质，先作$R(T)\to R(T^*)$上的算子U：$UTx=T^*x$，由此可得本题结论。

［注］本题可改为：若S，$T\in\mathscr{B}(H)$，对一切$x\in H$，有$\|Sx\|=\|Tx\|$，则存在酉算子U，使$S=UT$。

51．设H为Hilbert空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，$R(T)=H$，试证明存在常数$\alpha>0$，使得对一切$x\in H$，有

$$\|T^*x\|\geqslant\alpha\|x\|$$

提示 令$J=\{x\in H:\|T^*x\|\leqslant 1\}$，并作$H$上的有界线性泛函

$$f_x(y)=(y,\ x)\qquad(y\in H)$$

应用共鸣定理证明存在常数$K>0$，使得

$$\sup_{x\in J}\|f_x\|\leqslant K$$

从而可得，对一切$y\in H$，成立

$$\|T^*y\|\geqslant\frac{1}{K}\|y\|$$

52．设H为Hilbert空间，$T\in\mathscr{B}(H)$为单侧移位算子，$Te_k=e_{k+1}$，$k=1,2,\cdots$，其中$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是H的完备标

准直交基。若N是H的闭子空间，N约化算子T，则$N=\{0\}$或者$N=H$。

提示 设$N\neq\{0\}$，令m是$y\neq0$，$y=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\in N$中使$\lambda_k\neq0$的最小指标，证明$m=1$。

53. 设H为Hilbert空间，$\lambda\in C$，则下列条件等价(H换成Banach空间X也成立)：

(i) $\lambda\in\sigma_a(T)$；

(ii) 存在算子序列S_n，$\|S_n\|=1$，使$\|(T-\lambda I)S_n\|\to0$ $(n\to\infty)$。

54. 设F是复平面C上的任一非空有界闭集，$\{e_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$是H的正规正交基，则存在一个正常算子T，使得

(i) $\sigma(T)=F$；

(ii) $\lambda\in F\Leftrightarrow\lambda\in\sigma_a(T)$。

提示 取F的一个可数稠子集$\{\mu_n\}$，作$T\in\mathscr{B}(H)$如下：

$$Te_n=\mu_n e_n \qquad n=1,2,\cdots$$

55. 设H为Hilbert空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，$\sigma(T)\subset\{z\in C:|z|<r\}$，如果$|z|<r$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n T^n$在$H$上处处收敛。

提示 实际上利用题设条件可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot\|T^n\|$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n T^n$按算子范数收敛。

附录　南京大学攻读硕士学位研究生入学考试实变函数试题选解

1981—1985年

试　　题

1. 设E为有界可测集，$mE>0$，证明对于任何$0<q<mE$，存在E的可测子集e，使$me=q$（还可以讨论E为无界集的情形）。

2. 设E为可测集，$mE<+\infty$，则E上可测函数$f(x)$可积的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|mE_n<+\infty$$

其中$E_n=\{x\in E: n-1\leqslant f(x)<n\}$。

3. 对于实数A，用$[A]$表示不超过A的最大整数，设$f(x)$在有限区间$[a,b]$上可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b[nf(x)]dx=\int_a^b f(x)dx$$

（$[nf(x)]$的可测性不必证明。）

4. 设$f(x)$在有限区间$[a, b]$上连续，$|f(x)|$在$[a,b]$上囿变，则$f(x)$在$[a,b]$上囿变。

5. 设A,B,C为$R=(-\infty, \infty)$上三个非空互不相交的有界闭集，试证存在一个于R上连续的函数$f(x)$满足

$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，且$f(A)=0$，$f(B)=\frac{1}{2}$，$f(C)=1$

6. 设R为实数加群，φ为R上复值连续映射，满足

$$|\varphi(x)|=1 \qquad (x\in R)$$

且$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$，$(x,y\in R)$，试证存在$u\in R$，使

$$\varphi(x)=e^{iux} \qquad (x\in R)$$

7. 函数$f(x)$在康托(Cantor)集P_0的点上等于10，而在P_0的具有长度为$\frac{1}{3^n}$的余区间上等于$\frac{1}{2^n}$。

(1) 证明$f(x)\in L^p[0,1](1\leqslant p<+\infty)$；

(2) 计算$(L)\int_0^1 f(x)dx$。

8. 试用叶果洛夫定理证明有界收敛定理，即若$\{f_n(x)\}$是E上的一串一致有界的可测函数，且在E上$f_n(x)$几乎处收处敛于$f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$$

9. 是非题与填充题

(1) 设$1\leqslant p<q<\infty$，则$L^q(R)\subset L^p(R)$或$L^p(R)\subset L^q(R)$两式必有一成立，这里$R=(-\infty,\infty)$。(是非题)

(2) 设$f\in L^\infty(R)$，$F(x)=\int_a^x f(x)dt$，a为实数，则$F(x)$几乎处处有有限导数。(是非题)

(3) 康脱(G·Cantor)三分集可用来说明(只须列出三件事)。(填充题)

10. 设$f(x)$是以2π为周期的平方可积函数且存在$\alpha>0$满足

$$\|f(x+h)-f(x)\|_2=o(h^{1+\alpha}),\ h\to 0$$

试证$f(x)$几乎处处为常数。

11. 设F是R^2中闭集，则对几乎所有$x\in F$，有

$$\rho(x+h,F)=o(|h|),\quad h\to 0,\quad h\in R^2$$

其中$\rho(Z,F)$表示点Z到集F的距离。

12. 设$f\in L^p(R)$,则对任何$p_1,p_2,p_1<p<p_2$，恒有

$$f\in L^{p_1}(R)+L^{p_2}(R)$$

这里$S_1+S_2=\{\varphi_1+\varphi_2:\ \varphi_1\in S_1,\ \varphi_2\in S_2\}$。并给出这种分解的一个应用（不要论证）。

13. 设$f(z)$为复平面上的解析函数,且无零点，A为复平面上的紧集，$\{W_n\}$为收敛于0的点列,考虑复数集$E_n=[f(A)]^{-1}W_n[f(A)]$,这里两集X与Y的"积"定义为$XY=\{xy:\ x\in X,\ y\in Y\}$，$xy$为复数乘积；$X$的"逆"定义为$X^{-1}=\{x^{-1}:x\in X\}$。试证，把$E$看成平面点集时，有

$$\lim_{n\to\infty} mE_n=0$$

14. 设$E=(0,1)$，f，g为E上非负可测函数，满足，

$$f(x)g(x)\geqslant x^{-1}\qquad a.e$$

试证

$$\int_E f(x)dm\int_E g(x)dm\geqslant 2$$

并问等号可否成立?

15. 令$F(x)=\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}f(t)dt$,其中$f\in L(-\infty,\infty)$,

且$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}fdm\neq 0$，$a\in(-\infty,\infty)$，试证$F\overline{\in}L(-\infty,\infty)$。

16. 令$Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,考虑集

$$E_\alpha=\{Z+\alpha Z\}$$

问　(i)当α为无理数时，E_α有何性质?

(ii) 要求E_α为闭集，α应如何？

(iii) 求$\bigcup_{\alpha\in P} E_\alpha$的测度，这里$P$表示[0,1]中的Cantor集。

17. 设$f\overline{\in}L^p(-\infty,\infty)$，这里$p\geqslant 1$，试作出函数列$f_n$，$n=1,2,\cdots$，满足下列条件：

$$\|f_n\|_{p'}=1,\quad 这里\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f_n(x)dx=\infty$$

18. 设$f(x)$是以2π为周期的实可测函数，若f又有周期1，试证$f(x)$几乎处处为常数。这样的函数是否必为常数。

解　答

1. 解

设 $a=\inf\limits_{x\in E} x$，$b=\sup\limits_{x\in E} x$，　则$E\subset[a,b]$，令

$$E_x=[a,x]\cap E,\ a\leqslant x\leqslant b$$

则$f(x)=mE_x$是$[a,b]$上的连续函数，事实上，

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|=|mE_{x+\Delta x}-mE_x|\leqslant|\Delta x|$$

所以，当$\Delta x\to 0$时，$f(x+\Delta x)\to f(x)$。

又因为

$$f(a)=0,\ f(b)=mE$$

由连续函数的介值定理，当$0<q<mE$时，必有$x_1\in[a,b]$，使

$$f(x_1)=q$$

令$e=[a,x_1]\cap E$，则

$$e\subset E,\ me=q$$

若E为无界集，可作

$$f(x)=m([-x,x]\cap E),\ (0\leqslant x<\infty)$$

则$f(x)$为$[0,\infty)$上的增函数，且

$$f(0)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=mE$$

于是对任何$0<q<mE$，必存在$X>0$，使

$$q<f(X)<mE$$

令$E_1=[-X,X]\cap E$，E_1为有界可测集，于是存在$e\subset E_1\subset E$，使$me=q$。

2. 证

本题的$f(x)$是几乎处处有限的，否则充分性不成立。在这样的条件下，有

$$\int_E|f(x)|dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm+\sum_{n=0}^{-\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm$$

当$n\geqslant1$时，

$$(n-1)mE_n\leqslant\int_{E_n}|f(x)|dm\leqslant n\cdot mE_n$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n-mE\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n-\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)mE_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n$$

当$n\leqslant0$时，

$$|n|\cdot mE_n\leqslant\int_{E_n}|f(x)|dm\leqslant|n-1|\cdot mE_n$$

于是

$$\sum_{n=0}^{-\infty}|n|\cdot mE_n\leqslant\sum_{n=0}^{-\infty}\int_{E_n}|f(x)|dm$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{-\infty}(|n|+1)mE_n\leqslant\sum_{n=0}^{-\infty}|n|\cdot mE_n+mE$$

因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\cdot mE_n-mE\leqslant\int_E|f(x)|dm$$

$$\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\cdot mE_n+mE$$

因为$mE<\infty$，所以$f(x)$在E上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\cdot mE_n<\infty$$

3. 证

因为$\left|\frac{1}{n}[nf(x)]\right|\leqslant\frac{1}{n}(|nf(x)|+1)$

$$\leqslant|f(x)|+1\in L[a,b]$$

又

$$\left|\frac{1}{n}[nf(x)]-f(x)\right|=\frac{1}{n}|[nf(x)]-nf(x)|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\longrightarrow 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[nf(x)]=f(x)$$

由勒贝格控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b[nf(x]dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[nf(x)]dx$$
$$=\int_a^b f(x)dx$$

4. 证

由题设

$$\bigvee_a^b|f|=\sup\sum_{k=1}^n\Big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\Big|<\infty$$

对$[a,b]$的任一分法T：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

令 $V_T(f)=\sum_{k=1}^n|f(x_k)-f(x_{k-1})|$表示$f(x)$对应于分法$T$的变差。

若$f(x_k)$与$f(x_{k-1})$不是异号，则

$$\Big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\Big|=\Big|f(x_k)-f(x_{k-1})\Big|$$

若$f(x_k)$与$f(x_{k-1})$异号，则由连续性，存在一点$\zeta_k\in(x_{k-1},x_k)$，使$f(\zeta_k)=0$，于是

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$
$$=|f(x_k)-f(\zeta_k)|+|f(\zeta_k)-f(x_{k-1})|$$
$$=\Big||f(x_k)|-|f(\zeta_k)|\Big|+\Big||f(\zeta_k)|-|f(x_{k-1})|\Big|$$

对每个在端点上函数值异号的区间(x_{k-1},x_k)，加进使$f(\zeta_k)=0$的点ζ_k，这样对应的分法T就成了一个新的分法T'，此时

$$V_T(f)=V_{T'}(|f|)\leqslant\bigvee_a^b(|f|)<\infty$$

由于T是$[a, b]$的任一分法，得

$$\bigvee_a^b (f) \leqslant \bigvee_a^b (|f|) < \infty$$

［注］ 另一方面，对任一分法T，恒有

$$\sum_{k=1}^{n} \Big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

于是

$$\bigvee_a^b (|f|) \leqslant \bigvee_a^b (f)$$

由此可见，对于连续函数$f(x)$，有$\bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^b (|f|)$成立。

5. 证

令$\rho(x, E)$为x到集$E \subset R$的距离，则$\rho(x, E)$为x的非负连续函数$(x \in R)$。 令

$$f(x) = \frac{\rho(x, A \cup B) + \rho(x, A \cup C)}{\rho(x, A \cup B) + 2\rho(x, A \cup C) + \rho(x, B \cup C)}$$

注意到A、B、C是互不相交的非空有界闭集，即可知$f(x)$在R上连续，满足$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，且当$x \in A$时，$f(x) = 0$，$x \in B$时，$f(x) = \frac{1}{2}$，$x \in C$时，$f(x) = 1$。

6. 证

在$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$中，令$x = 0$得$\varphi(0) = 1$，又$\varphi$为连续函数，故必存在$h > 0$，使

$$\int_0^h \varphi(t)dt = c \neq 0$$

于是

$$\varphi(x) = \frac{1}{c}\varphi(x)\int_0^h \varphi(t)dt = \frac{1}{c}\int_0^h \varphi(x)\varphi(t)dt$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^h \varphi(x+t)dt=\frac{1}{c}\int_x^{x+h}\varphi(t)dt$$

由此可见，$\varphi(x)$有连续的导数$\varphi'(x)$。

在等式$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$两边对$y$求导，并令$y=0$，得

$$\varphi'(x)=\varphi'(0)\varphi(x)$$

解此方程得

$$\varphi(x)=e^{iux}\qquad (u\in R)$$

7．证

(1) 因为

$$(L)\int_0^1 |f(x)|^p dx=10^p\cdot mP_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^p$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{np}}<\infty$$

所以

$$f(x)\in L^p[0,1]\qquad (1\leqslant p<\infty)$$

(2) $$(L)\int_0^1 f(x)dx=10\cdot mP_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{4}$$

8．证

本题应有条件$mE<\infty$，且不妨设$mE>0$（否则结论显然成立）。

设$|f_n(x)|\leqslant M$，$n=1,2,\cdots$，$x\in E$，则$|f(x)|\leqslant M$在E上$a.e$成立。

任给$\varepsilon>0$，由叶果洛夫定理，存在$E_\varepsilon\subset E$，使

$$m(E-E_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{4M}$$

而在E_ε上，$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$。因为

$$\left|\int_E f_n(x)dx-\int_E f(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_{E_\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|dx+\int_{E-E_\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|dx$$

在$E-E_\varepsilon$上，几乎处处有$|f_n(x)-f(x)|\leqslant 2M$，所以

$$\int_{E-E_\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|dx\leqslant 2M\cdot m(E-E_\varepsilon)$$

$$<2M\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon/2$$

在E_ε上，由$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$知，存在N，使当$n>N$时，对一切$x\in E_\varepsilon$，有$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2mE}$，　所以

$$\int_{E_\varepsilon} f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2mE}\,mE=\frac{\varepsilon}{2}$$

于是当$n>N$时

$$\left|\int_E f_n(x)dx-\int_E f(x)dx\right|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$$

9．解

(1)　结论不成立。例如

当$f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x\leqslant 1\\ x^{-\frac{1}{3}} & x>1\end{cases}$

$f\in L^4(R)$，但$f\notin L^3(R)$；

$$当f(x)=\begin{cases}0 & \infty<x\leqslant 0或x>1\\ x^{-\frac{1}{4}} & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

$f\in L^3(R)$，但$f\overline{\in}L^4(R)$。

（2）结论成立。事实上，对任何包含a的区间$[\alpha,\beta]$，由$f\in L^\infty[\alpha,\beta]$知$f\in L[\alpha,\beta]$。于是$F(x)$为$[\alpha,\beta]$上的绝对连续函数，从而$F'(x)$在$[\alpha,\beta]$上几乎处处存在且有限。由$[\alpha,\beta]$的任意性知，$F'(x)$在$R$上几乎处处存在且有限。

（3）康脱三分集可用以说明：在R上势为$\aleph$的集的测度不一定大于0；完全集不一定包含任何区间；无孤立点的集合不一定有内点。

10. 证

令$\varphi(t)=\|f(x+t)-f(x)\|_2$，任取$l>0$，则由$f(x)$的周期性得

$$\varphi(l)=\|(f(x+l)-f(x)\|$$

$$\leqslant\|f(x+l)-f(x+\frac{l}{2})\|_2+\|f(x+\frac{l}{2})-f(x)\|_2$$

$$=\|f(x+\frac{l}{2})-f(x)\|_2+\|f(x+\frac{l}{2})-f(x)\|_2$$

$$=2\varphi(\frac{l}{2})$$

于是

$$\frac{\varphi(l)}{l}\leqslant\frac{2\varphi\left(\frac{l}{2}\right)}{l}=\frac{\varphi\left(\frac{l}{2}\right)}{l/2}$$

$$\leqslant\frac{\varphi\left(\frac{l}{4}\right)}{l/4}\leqslant\cdots\leqslant\frac{\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)}{l/2^n}$$

令$n\to\infty$，则$\frac{l}{2^n}\to 0$.由题设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)}{l/2^n}=0$$

因此$\frac{\varphi(l)}{l}=0$。而$l>0$，所以

$$\varphi(l)=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+l)-f(x)\right]^2dx\right\}^{1/2}=0$$

于是

$$f(x+l)-f(x)\sim 0$$

由l的任意性，得

$$f(x)\sim 0$$

11. 证

先设F为R^2中的有界集。

令 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in F,\\ 0 & x\bar{\in} F,\end{cases}$ 则$f\in L(R^2)$。因此几乎所有的$x\in R^2$为$f(x)$的勒贝格点.因此,对几乎所有的$x\in R^2$有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{mB(x,r)}\int_{B(x,r)}f(y)dy=f(x)$$

其中$B(x,r)$表示R^2中的以x为中心，r为半径的圆。于是对几乎所有的$x\in F$，有

$$\lim_{r\to 0}\frac{m\{F\cap B(x,r)\}}{mB(x,r)}=1 \tag{1}$$

成立。可以证明若$x\in F$且满足(1)，则对任何$\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，当$h$充分小时，存在$y\in F\cap B(x+h,\varepsilon|h|)$。事实上，若此论断不对，则对任何$\delta>0$，必有$0<|h|<\delta$，使

$$F\cap B(x+h,\varepsilon|h|)=\phi$$

从而有

$$\frac{m\{F\cap B(x,|h|+\varepsilon|h|)\}}{mB(x,|h|+\varepsilon|h|)}$$

$$\leqslant\frac{mB(x,|h|+\varepsilon|h|)-mB(x+h,\varepsilon|h|)}{mB(x,|h|+\varepsilon|h|)}$$

$$=1-\frac{\pi\varepsilon^2|h|^2}{\pi(1+\varepsilon)^2|h|^2}=1-\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}<1$$

此与（1）式相矛盾。于是有

$$\rho(x+h,\ F)\leqslant\rho(x+h,\ y)\leqslant\varepsilon|h|$$

由 ε 的任意性，得

$$\rho(x+h,F)=o(|h|)\qquad h\to0,\ h\in R^2$$

若 F 为 R^2 中的无界闭集，则总可将 F 分成可列个有界闭集的并：$F=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$。对任何一个 i，对几乎所有的 $x\in F_i$，有

$$\rho(x+h,F)\leqslant\rho(x+h,F_i)=o(|h|)\quad h\to0$$

于是对几乎所有的 $x\in F$，有

$$\rho(x+h,F)=o(|h|)\qquad h\to0$$

12. 证

对 $f\in L^p(R)$，令 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & 当|f(x)|>1\\ 0 & 当|f(x)|\leqslant1\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}f(x) & 当|f(x)|\leqslant1\\ 0 & 当|f(x)|>1\end{cases}$$

则

$$\int_R |f_1(x)|^{p_1} dx = \int_R |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1 - p} dx$$

$$\leqslant \int_R |f(x)|^p dx < \infty$$

$$\int_R |f_2(x)|^{p_2} dx = \int_R |f_2(x)|^p |f_2(x)|^{p_2 - p} dx$$

$$\leqslant \int_R |f(x)|^p dx < \infty$$

应用这种分解，可以证明如下定理：如果$1 < r \leqslant \infty$，T是一个从$L^1(R) + L^r(R)$到可测函数空间上的半可加映射，且T是弱(1,1)型，弱(r,r)型的，则对任何$1 < p < r$，T是(p,p)型的。

13. 证

由题设条件，可令

$$M = \max_{z \in A} |f(z)| \qquad m = \min_{z \in A} |f(z)|$$

且有$0 < m \leqslant M < \infty$，于是对任何$w \in E_n$，有

$$|w| \leqslant \frac{M}{m} |w_n|$$

故

$$mE_n \leqslant \pi \left(\frac{M}{m} \right)^2 |w_n|^2$$

由$|w_n| \to 0$，得

$$\lim_{k \to \infty} mE_n = 0$$

14. 证

由 Hölder 不等式

$$\int_E (x^{-1})^{\frac{1}{2}} dx \leqslant \int_E [f(x)g(x)]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\leqslant \left(\int_E f(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E g(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

而

$$\int_E x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

所以

$$\int_E f(x)dx \int_E g(x)dx \geqslant 4 > 2$$

显然等号不会成立。

15. 证

设 $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f dm \right| = l \quad 0$，则存在$N > 0$，使当$x > N$时

$$\left| \int_{a-x}^{a+x} f(t)dm \right| > \frac{l}{2}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F| dm \geqslant \int_N^{\infty} \frac{1}{x} \left| \int_{a-x}^{a+x} f(t)dm \right| dm$$

$$\geqslant \frac{l}{2} \int_N^{\infty} \frac{1}{x} dm = \infty$$

16. 解

（i）当 α 为无理数时，则E_α为 R 上的可数稠密集。可数性是显然的，下证稠密性。即证，对任何 $x \in R, \delta > 0$，存在$a, b \in Z$，使

$$a + b\alpha \in (x - \delta,\ x + \delta)$$

任取正整数 m，使$\frac{1}{10^m} < \delta$，在集合 $\{n\alpha : n = 1, 2, \cdots\}$ 中，至少有两个数 $n_1\alpha$，$n_2\alpha$，它们的前 m个小数位上的数字相同。若 $n_1\alpha - n_2\alpha$的整数部分为k，则

$$|n_1\alpha - n_2\alpha - k| < \frac{1}{10^m} < \delta$$

又因 α 为无理数，所以

$$n_1\alpha - n_2\alpha - k \neq 0$$

设 $|(n_1 - n_2)\alpha - k| = N\alpha + K$，　K，$N \in Z$，则

$$0 < K + N\alpha < \delta$$

于是存在 $S \in Z$，使

$$x - \delta < S(K + N\alpha) < x + \delta$$

令$a = SK$，$b = SN$，则

$$a + b\alpha \in (x - \delta,\ x + \delta)$$

(ii) 当且仅当 α 为有理数时，E_α 为闭集。事实上：当 α 为无理数时，由 (i) $\overline{E_\alpha} = R \neq E_\alpha$，故 E_α非闭。当α为有理数时，若 $\alpha = 0$，则$E_\alpha = Z$，若$\alpha \neq 0$，令$\alpha = \frac{p}{q}$，q 为正整数，$p \in Z$，且p，q互质，则

$$E_\alpha = \bigcup_{a \in Z} \left\{ a + \frac{1}{q},\ a + \frac{2}{q},\ \cdots,\ a + \frac{q-1}{q} \right\}$$

可见当 α 为有理数时，E_α 无聚点。于是 $\overline{E_\alpha} = E_\alpha$，故 E_α 为闭集。

(iii) 首先 $\bigcup\limits_{\alpha \in P} E_\alpha = \bigcup\limits_{a,b \in Z} (a + bP)$，事实上，

$$x \in \bigcup_{\alpha \in P} E_\alpha \Leftrightarrow 存在 a,\ b \in Z,\ \alpha_0 \in P,$$

$$使 x = a + b\alpha_0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{a,b \in Z} (a + bP)$$

于是
$$m(\bigcup_{\alpha \in P} E_\alpha) \leqslant \sum_{a,b \in Z} m(a + bP) = 0$$

17. 解

当 $p>1$ 时，令 $a_n=\int_{-n}^{n}|f|^p dx$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_{-\infty}^{\infty}|f|^p dx=\infty$$

又令

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{|f|^{\frac{1}{p/+1}}\operatorname{sgn}f}{a_n^{1/p'}} & x\in(-n,\ n)\\ 0 & x\overline{\in}(-n,\ n)\end{cases}$$

则 $\|f_n\|_{p'}^{p'}=1$， 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^{1/p'}}\int_{-n}^{n}|f|^p dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n^{1/p}=\infty$$

当 $p=1$ 时，令 $f_n(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}f(x) & x\in(-n,n)\\ 0 & x\overline{\in}(-n,n)\end{cases}$

则 $\|f_n\|_\infty=1$， 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}|f(x)|dx$$

$$=\|f\|_1=\infty$$

18. 证

(i) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,\ \infty)$ 上的连续函数。令

$$E_0=\{2k\pi+l:\ k,\ l=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

则 $f(x)$ 在 E_0 上为常数。由本附录第16题知，E_0 在 $(-\infty,$

∞)上稠密。由 $f(x)$ 的连续性知，$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上恒为常数。

(ii) 设 $f(x)$ 在任一有穷区间上 L 可积，令

$$f_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(s)ds=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+s)ds$$

则对任何一个 $h>0$，$f_h(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，又因 $f(x)$ 以 1 为周期，所以

$$f_h(x+1)=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+1+s)ds$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+s)ds=f_h(x)$$

即 $f_h(x)$ 亦以 1 为周期。同理，$f_h(x)$ 亦以 2π 为周期，由(i)得 $f_h(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上恒为常数。

因 $f(x)$ 在任何有穷区间上 L 可积，所以 $\lim\limits_{h\to\infty}f_h(x)=f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上几乎处处成立。于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上几乎处处为常数。

(iii) 设 $f(x)$ 为实可测函数，令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & |f(x)|\leqslant n\\ n & |f(x)|>n\end{cases}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

则对每个 n，$f_n(x)$ 在任一有穷区间上 L 可积，且以 1 和 2π 为周期。由(ii)得，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上几乎处处等于常数。设 E_n 是使 $f_n(x)$ 等于常数的点集，则 $m\mathscr{C}E_n=0$。令 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则 $m\mathscr{C}E=0$，在 E 上，每个 $f_n(x)$ 都为常数。又 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$x\in(-\infty,\infty)$，故 $f(x)$ 在 E 上为

常数，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上几乎处处为常数。

以上的 $f(x)$ 不一定为常数。例如，设

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in E_0\\ 0 & x\overline{\in} E_0\end{cases}$$

其中 $E_0=\{2k\pi+l:\ k,\ l=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，则 $f(x)$ 是以 1 和 2π 为周期的实可测函数，但非常数。

参考文献

［1］ 郑维行、王声望，实变函数与泛函分析概要（第一册）

［2］ 郑维行、王声望，实变函数与泛函分析概要（第二册）

［3］ 夏道行、严绍宗、吴卓人、舒五昌编，实变函数与泛函分析（上、下册）

［4］ 程其襄等编，实变函数与泛函分析基础

［5］ ［苏］А.Б.安托理维奇，П.Н.克尼亚泽夫，Я.В.提迪诺著，泛函分析习题集（赵根榕译）

［6］ 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，（1959）

［7］ I. J. Maddox, *Elements of functional analysis*, 1978

［8］ E. Kreyszin, *Introductory functional analysis with applications*, 1980

［9］ S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert space*, 1961

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实变函数与泛函分析学习指导
作者＝宋国柱　马永培编
页数＝２９９
ＳＳ号＝１０８３２９６８
出版日期＝１９８８年０６月第１版

前言

目录

目　　录